COURS COMPLET

D'ARITHMÉTIQUE.

Ouvrage du même auteur.

Sous presse pour paraître le 1er décembre.

COURS COMPLET D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, 2e *édition*, conforme au nouveau programme.

Tout exemplaire qui ne sera pas revêtu de la signature de l'auteur sera réputé contrefait.

A. Guilmin

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Ce, RUE RACINE, 26.

COURS COMPLET
D'ARITHMÉTIQUE

A L'USAGE

DES LYCÉES ET COLLÉGES

ET DE TOUS LES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR A. GUILMIN,

LICENCIÉ ÈS SCIENCES, PROFESSEUR A PARIS;

Ouvrage autorisé

Par le Conseil de l'Instruction publique.

TROISIÈME ÉDITION

ENTIÈREMENT RÉDIGÉE A NOUVEAU EN PARFAITE CONFORMITÉ

AVEC LE PROGRAMME

Du 30 août 1852,

ET COMPLÉTÉE PAR DE NOMBREUSES APPLICATIONS

AUX SCIENCES, AU COMMERCE ET A LA BANQUE.

PARIS.

AUGUSTE DURAND, LIBRAIRE,

Rue des Grès, 5.

1853.

AVANT-PROPOS.

Bien que le cours d'arithmétique ait été plutôt diminué qu'étendu, il a néanmoins subi des modifications essentielles. Des matières nouvelles qui n'y étaient pas précédemment enseignées, ont pris une place obligatoire dans ce cours; certains chapitres ont été considérablement modifiés, d'autres entièrement supprimés; suivant les commentaires officiels du programme, l'enseignement de l'arithmétique, comme celui de toutes les parties du cours des sciences, doit prendre un caractère de plus en plus prononcé d'utilité pratique.

Ce nouvel état de choses nécessitait une révision complète des traités d'arithmétique précédemment en usage. Pour mon compte, je n'ai pas hésité à faire table rase, et *à rédiger mon cours entièrement à nouveau, en parfaite conformité avec le nouveau programme, et dans l'esprit indiqué par les commentaires susdits*; tel est du moins le but que je me suis proposé.

Après avoir terminé le cours proprement dit, c'est-à-dire, développé toutes les questions du programme, *dans leur ordre officiel*, j'ai cru devoir le faire suivre d'une nombreuse série d'applications aux sciences, à la banque et au commerce, traitées suivant les méthodes et avec les simplifications usitées par les praticiens spéciaux. On trouvera en outre dans le cours et dans le complément un grand nombre de renseignements et de tables utiles. (*)

J'ai tâché de simplifier la théorie générale et l'explication des problèmes, mais en y mettant toute la rigueur possible; clarté, rigueur, utilité, voilà mon programme en peu de mots.

A. GUILMIN.

(*) Pour les questions de commerce et de banque j'ai consulté utilement un excellent ouvrage de MM. SARDOU et GOUJON, *Cours complet de tenue de livres et d'opérations commerciales*. (Paris, Hachette, 1852.)

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE (*).

(*) Le temps nous manque pour faire un errata. Mentionnons seulement la définition du titre d'un alliage de métaux, page 163, rectifiée en note, page 188, et page 301 ; secondement, page 187, ligne 14, au lieu de 4°, lisez 0°.

COURS
D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

NUMÉRATION DÉCIMALE.

1. BUT DE L'ARITHMÉTIQUE. L'idée de *nombre* doit son origine à la considération de plusieurs objets semblables ou de même espèce dont on a voulu exprimer la réunion. Ex. : J'ai vu *vingt* moutons, j'ai cueilli *dix* pommes, j'ai reçu *huit* francs.

On nomme *unité* l'objet dont la répétition s'exprime par un nombre. Ex. : un mouton, une pomme, un franc.

Le premier nombre est l'unité elle-même ou *un*; on forme les suivants en ajoutant l'unité à elle-même, puis une unité au nouveau nombre obtenu, et ainsi de suite indéfiniment.

Les nombres ainsi formés sont les nombres entiers; la suite en est évidemment illimitée (*).

(*) Plus tard, et par extension d'idée, on a considéré d'autres nombres que ceux dont nous venons d'indiquer sommairement la formation; on a considéré des fractions ou nombres fractionnaires. Mais, *jusqu'à nouvel ordre*, nous ne nous occuperons exclusivement que des nombres entiers, qui sont les plus importants, les opérations sur les autres nombres se ramenant toujours en définitive à des opérations sur les nombres entiers.

On dit habituellement qu'un nombre est *concret* quand on l'énonce en désignant l'espèce de ses unités; ex. : *vingt francs*, et qu'il est *abstrait* quand on ne désigne pas l'espèce de ses unités; ex. : *vingt*.

L'arithmétique est la science des nombres; elle s'occupe de leurs propriétés élémentaires et du calcul, c'est-à-dire des diverses opérations qu'on peut avoir à exécuter sur les nombres dans leurs diverses applications.

Nous commencerons l'arithmétique par la nomenclature des nombres et les conventions faites pour les écrire d'une manière abrégée; c'est ce qui fait l'objet de la numération.

2. *La* NUMÉRATION *est l'ensemble des conventions faites pour nommer les nombres avec peu de mots, et les écrire avec un petit nombre de caractères.*

Elle se subdivise naturellement en deux parties : la numération *parlée* et la numération *écrite*.

NUMÉRATION PARLÉE OU NOMENCLATURE DES NOMBRES.

Les premiers nombres sont par ordre de grandeurs :

Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix.

Dix unités *simples* ou *du* 1er *ordre* composent une unité d'un nouvel ordre, appelée DIZAINE; on compte les dizaines comme les unités simples : *une dizaine, deux dizaines, trois dizaines*, etc.,... jusqu'à *neuf dizaines*; on a donné à ces nombres de dizaines les noms suivants :

Dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingts-dix (*).

Dix dizaines composent une unité *du* 3e *ordre*, appelée CENTAINE ou *cent*; on compte les centaines comme les dizaines et les unités;

Cent, deux cents, trois cents, etc.,... *jusqu'à neuf cents*.

Dix centaines composent une unité du 4e ordre, appelée MILLE.

(*) On désigne dans certaines provinces de la France les 3 derniers nombres de dizaines par les mots *septante, octante, nonante*.

A la suite des six autres noms, ceux-là nous semblent plus convenables que soixante dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix. Nous conservons cependant ces derniers noms comme plus généralement adoptés.

On compte par mille comme par unités simples, dizaines et centaines. *Dix mille* composent une unité du 5ᵉ ordre, appelée *dizaine de mille.* Ainsi de suite, on continue aussi loin que l'on veut à grouper les unités en ordres successifs suivant cette loi fondamentale :

Dix unités d'un ordre quelconque en composent une d'un ordre immédiatement supérieur.

Voici les noms des unités des 15 premiers ordres :

1ᵉʳ *Ordre.* Unités simples.
2ᵉ *Ordre.* Dizaines.
3ᵉ *Ordre.* Centaines.
4ᵉ *Ordre.* Mille.
5ᵉ *Ordre.* Dizaines de mille.
6ᵉ *Ordre.* Centaines de mille.
7ᵉ *Ordre.* Millions.
8ᵉ *Ordre.* Dizaines de millions.
9ᵉ *Ordre.* Centaines de millions.
10ᵉ *Ordre.* Billions ou milliards
11ᵉ *Ordre.* Dizaines de billions.
12ᵉ *Ordre.* Centaines de billions.
13ᵉ *Ordre.* Trillions.
14ᵉ *Ordre.* Dizaines de Trillions.
15ᵉ *Ordre.* Centaines de trillions.
etc... etc...

On n'a guère occasion d'aller au delà des ordres d'unités qui viennent d'être indiqués.

3. *Un nombre quelconque, si grand qu'il soit, peut se décomposer en plusieurs parties composées chacune d'unités de l'un de ces ordres, en nombre inférieur à dix.* Par suite, à l'aide des noms et conventions qui précèdent, on peut énoncer un nombre d'unités quelconque.

Soit, par exemple, un nombre de grains de blé.

Si ce nombre est moindre que dix, on sait l'énoncer. S'il est plus grand que dix, on groupe les grains dix par dix, formant autant de dizaines que possible jusqu'à ce que, à part ces dizaines, il reste moins de dix grains de blé. Si on trouve ainsi moins de

dix dizaines, on énonce ce nombre de dizaines en le faisant suivre du nombre de grains moindre que dix qui l'accompagne.

Ex. : Il y a quatre dizaines de grains, plus sept grains; on énonce quarante-sept grains.

Il y a quelques exceptions à cette règle; au lieu des nombres,

Dix un, dix deux, dix trois, dix quatre, dix cinq, dix six,

Il est d'usage de dire :

Onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize.

Par suite, on dit *soixante-onze, soixante-douze,..... soixante-seize*; de même, *quatre-vingt-onze, quatre-vingt-douze,... quatre-vingt-seize.*

S'il y a plus de dix dizaines, ou d'une centaine de grains, on groupe de même les dizaines, dix à dix, formant autant de centaines que possible, jusqu'à ce que, à part ces centaines, il reste moins de dix dizaines. Si on a formé ainsi plus de dix centaines, on assemble de même les centaines, dix à dix, pour former autant de mille que possible, etc.; ainsi, de suite, on continue à former de la même manière des unités d'ordres supérieurs jusqu'à ce que le nombre des unités de l'ordre le plus élevé soit inférieur à dix.

Supposons, pour fixer les idées, que cela arrive dans notre exemple pour les centaines de mille. Le nombre de grains de blé se trouve alors décomposé en plusieurs parties composées chacune d'unités de l'un des six premiers ordres, en nombre inférieur à dix. Connaissant le nombre des unités de chaque ordre, et le nom de ces unités, on peut évidemment énoncer le nombre des grains.

Ex. : On a trouvé six centaines de mille, plus trois dizaines de mille, plus cinq mille, plus deux centaines, plus quatre dizaines, plus sept grains. On énonce ainsi : *six cent trente-cinq mille deux cent quarante-sept grains.*

4. Nous terminerons la numération parlée en rappelant la loi fondamentale, qui est le point de départ et le fondement de toutes les règles de calcul que nous étudierons bientôt :

Dix unités d'un ordre quelconque en composent une de l'ordre immédiatement supérieur.

A cause de cette loi, le nombre *dix* est appelé *la base* de notre système de numération, et ce système lui-même s'appelle *système décimal.*

NUMÉRATION ÉCRITE.

5. Pour écrire les nombres avec peu de caractères, on s'est fondé sur la proposition ci-dessus développée.

Tout nombre, si grand qu'il soit, est l'assemblage de plusieurs parties composées chacune d'unités d'un certain ordre, en nombre inférieur à dix.

Partant de là, on est convenu d'abord de représenter les neuf premiers nombres par les caractères suivants appelés CHIFFRES :

Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Puis de représenter les unités de tous les ordres par ces mêmes caractères, en les distinguant seulement les unes des autres par la place de leurs chiffres, d'après cette convention : le premier chiffre à droite d'un nombre représente des unités simples ; le second, en allant de droite à gauche, représente des dizaines ; le troisième, des centaines, et ainsi de suite par ordre de grandeurs croissantes. Par exemple, dans ce nombre,

35684,

Il y a 4 *unités simples*, 8 *dizaines*, 6 *centaines*, 5 *mille et* 3 *dizaines de mille*.

Le nombre de grains de blé dont nous nous sommes occupés n° 3, s'écrira donc ainsi : 635247.

S'il manque des unités d'un ordre quelconque, inférieur au plus élevé, on en fait tenir la place par ce dixième caractère, 0, qu'on appelle *zéro*. Ex. : Soit un nombre composé de 4 *unités*, 3 *centaines*, 6 *dizaines de mille*. Parmi les unités d'ordre inférieur aux dizaines de mille, il manque des dizaines d'unités simples et des unités de mille ; on écrira donc ainsi :

60304.

Le zéro n'a aucune valeur par lui-même ; il sert à conserver aux autres chiffres la place qui convient aux unités qu'ils doivent exprimer.

6. Chaque chiffre d'un nombre a deux valeurs : une valeur *absolue* et une valeur *relative*.

La valeur ABSOLUE d'un chiffre est la valeur qu'il aurait s'il était seul, celle, par exemple, qu'il a dans la liste ci-dessus des neuf premiers nombres.

La valeur RELATIVE d'un chiffre est celle qu'il représente quand on a égard à sa place dans le nombre.

Dans le nombre 35684, par exemple, le quatrième chiffre, en allant de droite à gauche, a pour valeur *absolue, cinq unités,* et pour valeur *relative, cinq mille.*

7. Voici une propriété remarquable des nombres résultant immédiatement de ce qui précède.

On rend un nombre 10, 100, 1000,..... *fois plus grand, en ajoutant un, deux, trois,... zéros, sur sa droite ; on rend un nombre* 10, 100, 1000,... *fois plus petit en supprimant un, deux, trois... zéros sur sa droite.*

Ex. : 3467 ; en ajoutant 3 zéros sur la droite de ce nombre, on obtient 3467000, nombre mille fois plus grand que 3467. En effet, le chiffre 7 qui dans le 1er nombre exprime des unités simples, exprime dans le second des mille ; le chiffre 6 qui exprime des dizaines d'unités simples, exprime dans le 2e nombre des dizaines de mille, unités mille fois plus grandes, etc..... Chacune des parties du nombre 3467 ayant été rendue mille fois plus grande, le nombre lui-même a été rendu mille fois plus grand.

Si on passe du nombre 3467000 au nombre 3467 en supprimant les 3 zéros, on établira de même la proposition inverse.

8. Pour énoncer ou pour écrire un nombre, il suffirait évidemment, ayant égard aux conventions précédentes, de bien indiquer par la parole ou l'écriture le nombre des unités simples, des dizaines, etc.,... en suivant l'ordre des grandeurs croissantes ou décroissantes de ces unités. C'est ce qui a lieu, en effet, pour les nombres inférieurs à mille ; mais quand il s'agit de nombres plus grands, on a égard, pour plus de facilité, à la remarque suivante :

Remarque. En jetant les yeux sur le tableau des unités des divers ordres, on a pu remarquer une certaine classification de ces unités, de trois ordres en trois ordres.

Les unités du premier ordre, qu'on nomme souvent *unités simples,* les dizaines et les centaines d'unités simples, forment une *première classe* d'unités.

2e *classe*. Mille, dizaines de mille, centaines de mille.

3e *classe*. Millions, dizaines de millions, centaines de millions.

4e *classe*. Billions, dizaines de billions, centaines de billions, etc.,.. de trois ordres en trois ordres.

Comme on le voit, dans chaque classe, les unités de l'ordre le moins élevé considérées comme unités principales sont seules désignées par un nom simple et spécial; les autres sont les dizaines et centaines de ces unités.

On compte dans chaque classe depuis une jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf unités principales.

On n'emploie ainsi qu'un seul mot nouveau par classe de trois ordres, ce qui rend la nomenclature plus facile à retenir.

De plus, comme on va le voir, en vertu de cette classification, lire ou écrire un nombre plus grand que mille revient à lire ou à écrire plusieurs nombres inférieurs à mille.

Voilà, au reste, les seuls avantages de cette classification à laquelle il ne faut pas attacher une trop grande importance; car les nombres une fois écrits, il n'est plus question de ces classes dans le calcul, mais seulement d'unités de dix en dix fois plus grandes les unes que les autres. Ces remarques faites, voici les règles pratiques pour énoncer ou écrire avec facilité un nombre quelconque.

RÈGLE POUR ÉCRIRE UN NOMBRE.

9. *Si le nombre est moindre que mille, on écrit par ordre, de gauche à droite, le chiffre des centaines, celui des dizaines et enfin celui des unités.*

Ex. : Trois cent vingt-cinq. Écrivez 325.

Si le nombre proposé égale ou surpasse mille, se dirigeant toujours de gauche à droite, on écrit d'abord le nombre des unités de la classe la plus élevée, à droite le nombre des unités de la classe immédiatement inférieure, et ainsi de suite, par ordre, jusqu'aux unités simples; s'il manque des unités d'un ordre quelconque, inférieur aux unités les plus élevées du nombre, on fait tenir la place de chaque ordre manquant par un zéro.

Ex. : Soit à écrire *trente-quatre billions, soixante-seize mille, deux cent quatre-vingt-douze unités* :

34,000,076,292.

On remarquera que la classe des millions manquant totalement, il y a trois zéros à la place des trois ordres de cette classe. En général, chaque classe inférieure à la plus élevée doit être représentée par trois chiffres, y compris les zéros qui doivent remplacer les ordres d'unité de cette classe qui pourraient manquer. Voyez ce qui arrive pour les mille.

LECTURE D'UN NOMBRE ÉCRIT.

10. *Si le nombre a moins de quatre chiffres, on énonce séparément les unités des divers ordres, en lisant de gauche à droite dans cet ordre : centaines, dizaines, unités.*

Ex. : 327 ; *trois cent vingt-sept.*

Quand le nombre a plus de quatre chiffres, on le partage d'abord par la pensée, ou à l'aide d'un signe quelconque, en tranches de trois chiffres, en allant de droite à gauche, la dernière tranche à gauche pouvant seule n'avoir qu'un ou deux chiffres.

Chaque tranche exprime distinctement les unités d'une même classe ; on se rend compte du nom de l'unité principale de chaque classe, en parcourant préalablement le nombre, de droite à gauche, tranche par tranche, et disant successivement : unités, mille, millions, etc. Enfin, lisant de gauche à droite, et par ordre, on énonce chaque tranche comme un nombre isolé, en nommant à la fin de chacune les unités de la classe qu'elle représente.

Ex. : Soit à énoncer 4532800004271. On le partage ainsi : 4,532,800,004,271 ; puis, allant de droite à gauche, tranche par tranche, on dit : unités simples, mille, millions, billions, trillions ; on constate ainsi que les plus hautes unités sont des trillions. Cela fait, on lit de gauche à droite en suivant la règle :

Quatre trillions, cinq cent trente deux billions, huit cent millions, quatre mille, deux cent soixante et onze unités (*).

Nous allons maintenant expliquer les opérations fondamentales de l'arithmétique.

(*) Ainsi qu'on le voit, écrire ou énoncer un nombre plus grand que mille, revient à écrire ou à énoncer plusieurs nombres moindres que mille.

CHAPITRE II.

OPÉRATIONS FONDAMENTALES SUR LES NOMBRES ENTIERS.

ADDITION.

11. *L'addition a pour but de trouver un nombre, appelé* SOMME *ou* TOTAL, *qui contienne exactement toutes les unités de plusieurs nombres donnés.*

L'addition s'indique par ce signe, +, plus : 47 + 38 + 12; 47 plus 38 plus 12.

Nous considérerons deux cas :

1° *Celui où l'on doit ajouter un nombre d'un seul chiffre à un nombre quelconque ;*

2° *Le cas où l'on doit additionner plusieurs nombres quelconques.*

12. 1er CAS. La somme d'un nombre quelconque et d'un nombre d'un seul chiffre ne peut se trouver que de la manière suivante :

Proposons-nous d'ajouter 6 à 48. *Au plus grand nombre 48, on ajoute successivement, et une à une, les unités du plus petit.* Ainsi on dit : 48 et 1, 49; 49 et 1, 50; 50 et 1, 51; 51 et 1, 52; 52 et 1, 53; enfin 53 et 1, 54.

De pareilles additions se faisant continuellement, il est bon de s'exercer à trouver immédiatement des sommes pareilles, à pouvoir dire immédiatement 48 et 6 font 54. On posera des additions telles que celle-ci :

$$\begin{array}{r} 5 \\ 7 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \\ \hline 31 \end{array}$$

On additionne ainsi : 5 et 7 font 12; 12 et 4, 16; 16 et 6, 22; 22 et 9, 31.

Comme on le voit, on fait là une suite d'additions partielles dont chacune rentre dans le cas précédent.

Quoique l'addition des cinq nombres précédents rentre plutôt dans le deuxième cas que dans le premier, nous avons cru devoir l'indiquer avant de faire une addition tout à fait quelconque.

2ᵉ CAS. Règle générale d'addition.

13. *Pour additionner plusieurs nombres quelconques, on les écrit les uns sous les autres, de manière que les unités de même ordre se correspondent dans une même colonne verticale ; on souligne le tout. Puis, commençant par la droite, on additionne les unités de la première colonne ou les unités simples. Si la somme de ces unités ne dépasse pas 9, on l'écrit au-dessous, telle qu'on l'a trouvée ; si elle dépasse 9, on écrit seulement les unités simples, et on retient les dizaines pour les ajouter aux dizaines de la deuxième colonne à gauche, que l'on additionne à leur tour. Si la somme de ces dizaines ne dépasse pas 9, on l'écrit au-dessous, telle qu'on l'a trouvée ; dans le cas contraire, on écrit seulement les unités de dizaines, et on retient les dizaines de dizaines, qui sont autant de centaines, pour les ajouter aux centaines de la troisième colonne, que l'on additionne par continuation, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait additionné la dernière colonne à gauche, dont on écrit la somme telle qu'on la trouve, dans tous les cas.*

Soit par exemple à additionner les nombres

5828, 4734, 87359, 438, 78547.

Nous poserons ainsi l'addition :

```
  5828
  4734
 87359
   438
 78547
------
176906
```

En commençant par la 1ʳᵉ colonne à droite, nous dirons : 8 et

4, 12; 12 et 9, 21; 21 et 8, 29; 29 et 7, 36 (*) : en 36 unités, il y a 6 unités et 3 dizaines; je pose 6 unités sous la colonne, et je garde ou retiens les 3 dizaines, pour les ajouter aux dizaines de la 2e colonne que nous allons additionner. 3 et 2, 5; 5 et 3, 8; 8 et 5, 13; 13 et 3, 16; 16 et 4, 20 : en 20 dizaines, il n'y a pas d'unités de dizaines; je pose 0 à la place des dizaines du total, et je retiens les 2 dizaines de dizaines, ou les 2 centaines, pour les ajouter à la colonne suivante, que l'on additionne de même; on continue ainsi jusqu'à la dernière colonne à gauche, au-dessous de laquelle j'ai écrit toute la somme 17.

Cette règle s'explique d'elle-même. On est obligé d'ajouter ensemble les unités d'une même espèce; il est donc plus commode de les avoir écrites dans une même colonne verticale. On procède de droite à gauche dans l'ordre des grandeurs croissantes des unités; en effet, la somme est un nombre unique qui ne doit renfermer qu'un seul nombre d'unités de chaque ordre, moindre que dix. Lorsque l'addition des unités d'une colonne donne plus de neuf unités, il y a lieu forcément à reporter au moins une unité de l'ordre supérieur sur la colonne immédiatement à gauche; si donc on avait additionné préalablement cette dernière colonne, on serait obligé de modifier la somme d'abord obtenue. Il est donc plus commode d'additionner de droite à gauche; car on n'a jamais ainsi à modifier un chiffre écrit.

14. Quand on a terminé une opération, il est bon d'en faire la *preuve.*

La *preuve* d'une opération est une deuxième opération faite pour s'assurer autant que possible de l'exactitude de la première.

Preuve de l'addition. Elle peut se faire comme il suit : *si on a additionné dans un certain sens, de haut en bas, par exemple, on recommence l'addition, en opérant de bas en haut. Si l'opération a été bien faite, il est évident que l'on doit trouver la même somme.* D'ailleurs, les chiffres ne se combinant pas généralement dans le même ordre, on n'est pas sujet à tomber dans les mêmes erreurs.

(*) On abrége le discours en s'énonçant ainsi : 8 et 4, 12; et 9, 21; et 8, 29; et 7, 36; on ne répète pas chaque somme partielle.

On peut se tromper dans la preuve comme dans l'opération à vérifier; les erreurs peuvent même se compenser, de sorte que les deux additions ayant fourni la même somme, il n'y a pas certitude absolue que cette somme soit exacte; mais il y a, dans ce cas, une très-grande probabilité pour l'exactitude. Cette observation s'applique à toutes les preuves.

15. REMARQUE. Nous n'avons opéré que sur des nombres abstraits; c'est que dans la pratique, on ne fait toujours en définitive les opérations que sur des nombres abstraits. On oublie momentanément le nom des unités que chaque nombre représente, et cela surtout depuis qu'on opère à peu près exclusivement sur les nombres décimaux. D'ailleurs, par exemple, de ce que $12+5=17$, chacun conclut naturellement que 12 mètres + 5 mètres = 17 mètres; 12 fr. + 5 fr. = 17 fr., etc.

Cette remarque s'étend à toutes les opérations; nous ne la répéterons pas.

EXERCICES.

15. Une pépinière contient 362 pommiers, 427 poiriers, 875 pruniers, 34 cerisiers, 249 pêchers et 327 abricotiers; combien contient-elle d'arbres en tout? *Rép.* 2274.

La population de la Martinique est d'environ 112837 habitants; celle de Bourbon, de 98000; celle du Sénégal, de 16892; celle de la Guyane, de 17585; et celle de la Guadeloupe, de 114286; combien y a-t-il d'habitants dans ces cinq colonies? *Rép.* 359600.

En 1845, la population de la France a augmenté de 237332 habitants; en 1846, de 151975; en 1847, de 62555; en 1848, de 104590; en 1849, de 13458. On demande l'augmentation totale pour ces cinq années. *Rép.* 569910.

Un rentier dépense chaque année 245 fr. pour son loyer, 840 fr. pour sa nourriture, 46 fr. de blanchissage, 178 fr. pour son habillement, et 320 fr. pour autres dépenses diverses; il lui reste 542 fr. Quel est son revenu? *Rép.* 2171 fr.

SOUSTRACTION.

16. *La soustraction est une opération par laquelle on retranche d'un nombre donné toutes les unités d'un autre nombre donné.*

Le résultat s'appelle *reste*. On dit aussi que le reste est la *différence* des deux nombres donnés, ou l'*excès* du plus grand sur le plus petit.

Ex. : Soustraire 5 de 8. Si de 8 on retranche successivement

et une à une, toutes les unités de 5, il reste d'abord 7, puis 6, puis 5,... et enfin 3, qui est le nombre cherché.

Il est évident que le plus grand nombre, 8, se compose des unités du plus petit, 5, et du reste 3; autrement dit, le plus grand nombre donné est la somme du plus petit nombre et du reste. C'est pourquoi on donne aussi cette définition :

La soustraction a pour but, étant donnés la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre nombre.

La soustraction s'indique par ce signe, —, qui s'énonce *moins*; 8 — 5, lisez 8 moins 5.

17. Le cas élémentaire de la soustraction est celui où le plus petit nombre n'ayant qu'un seul chiffre, le reste doit être moindre que dix.

Ex. : soustraire 7 de 13.

Le reste est moindre que dix, puisque le plus grand nombre est inférieur à dix-sept.

On retranche successivement de 13, et une à une, toutes les unités de 7; le dernier reste obtenu est le nombre cherché.

1 ôté de 13, il reste 12; 1 ôté de 12, il reste 11; 1 ôté de 11, il reste 10, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait retranché ainsi 7 unités; le dernier reste est 6.

Pour faire cette soustraction, le mieux est de nommer, en comptant sur ses doigts, et dans l'ordre décroissant, les nombres immédiatement inférieurs à 13, de cette manière : douze, onze, dix, etc..., jusqu'à ce qu'on soit arrivé au septième doigt; le nombre six, *dernier nommé*, est le reste cherché.

Il est bon d'acquérir assez d'habitude pour pouvoir dire immédiatement, et sans calcul, le résultat d'une pareille soustraction; 7 ôté de 13, il reste 6.

Car le résultat de la soustraction de deux nombres de plusieurs chiffres s'obtient en faisant un certain nombre de ces soustractions simples. C'est ce que nous allons montrer; mais auparavant nous ferons cette remarque :

18. *Le reste d'une soustraction ne change pas quand on augmente ou diminue d'un même nombre les deux termes de la soustraction.*

Supposons qu'ayant ôté 19 de 27, on ôte 19 + 5 de 27 + 5.
Mettons les deux soustractions en regard

27	27 + 5
19	19 + 5
8	8 + 0

Pour ôter 19 + 5 de 27 + 5, nous pouvons commencer par ôter 5 de 5; il ne reste rien. Le reste de cette seconde soustraction est donc simplement égal à l'excès de 27 sur 19, ce qu'il fallait prouver.

Voici maintenant la règle pour soustraire l'un de l'autre deux nombres quelconques.

19. RÈGLE. *Pour soustraire deux nombres entiers l'un de l'autre, on écrit le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent, les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, etc. On souligne le tout; puis, en opérant de droite à gauche et par ordre, on retranche chaque chiffre inférieur de son correspondant supérieur, et on écrit chaque reste au-dessous. S'il arrive qu'un chiffre inférieur soit plus grand que son correspondant supérieur, on augmente celui-ci de dix unités, et on retranche de la somme le chiffre inférieur. Mais, en continuant la soustraction, on augmente d'une unité le chiffre suivant à gauche, du nombre inférieur, pour retrancher ce chiffre ainsi augmenté de son correspondant supérieur.*

Ex. : Soit à soustraire 253842 de 608567.

$$\begin{array}{r} 608567 \\ 253842 \\ \hline 354725 \end{array}$$

Puisqu'il faut retrancher de 608567 toutes les unités de 253842, on arrivera au résultat en retranchant les unités du 1er nombre des unités du 2e, les dizaines des dizaines, etc. En écrivant chaque reste partiel au-dessous des chiffres qui l'ont fourni, on met ce chiffre à la place qui lui convient. 2 ôté de 7, il reste 5; 4 ôté de 6, il reste 2; ôter 8 de 5, c'est impossible; on ôte 8 de 15, il reste 7 : en opérant ainsi, on a lu 15 centaines dans le nombre supérieur là où il n'y a que 5 centaines; on a donc augmenté ce nombre supérieur de 10 centaines ou 1 mille : par compensation, on augmente aussi le nombre inférieur de 1 mille, et on ôte de 8 mille, 4 mille, au lieu de 3.

Il y a ainsi compensation, et le reste n'est pas changé (18). En continuant, on dit : ôter 5 de 0, cela ne se peut; on ôte 5 de 10, il reste 5; puis on ôte 3 de 6, il reste 3. Le reste cherché est 354725.

S'il y a des zéros dans le nombre supérieur, on traite chacun d'eux comme un chiffre trop faible, à moins qu'il ne corresponde à un zéro inférieur.

Voici un deuxième exemple :

	4300876504
	730458836
Reste. .	3570417668
Preuve. .	4300876504

Il serait indifférent de commencer la soustraction par la droite ou par la gauche, si aucun chiffre inférieur d'un bout à l'autre ne surpassait son correspondant supérieur; mais si le contraire arrive pour un ou plusieurs chiffres, il y a un inconvénient à opérer de gauche à droite. Ainsi, dans le 1er exemple, avant d'arriver aux centaines, on aurait déjà retranché 3 mille de 8 mille, ce qui aurait donné 5 mille; la soustraction suivante conduisant à ajouter 10 centaines, ou 1 mille, aux 5 centaines, pour rendre la soustraction partielle possible, oblige de revenir sur les mille, d'ôter 4 mille de 8 mille, ce qui donne pour reste 4 mille au lieu de 5. On est donc forcé de modifier un résultat déjà écrit, ce qui n'arrive pas quand on suit notre règle.

20. LA PREUVE *de la soustraction se fait en ajoutant le reste et le plus petit nombre*. En vertu de la définition, *on doit trouver pour somme le plus grand nombre*. Nous l'avons faite pour le dernier exemple.

EXERCICES.

Sur une pièce d'étoffe de 1876 mètres, il en a été vendu 978 mètres; combien en reste-t-il ? *Rép.* 898.

Louis XIV monta sur le trône en 1643 et mourut en 1715; combien d'années a-t-il régné? *Rép.* 72 ans.

Sous Philippe le Bel, la population de Paris était de 125092 habitants; en 1847, elle était de 1053897 habitants; quel a été son accroissement? *Rép.* 928805 habitants.

En 1849, il y a eu à Paris 40362 naissances et 60284 décès; quelle a été, d'après cela, la diminution de la population? *Rép.* 19922 habitants.

La 1re croisade eut lieu en 1096, et la septième et dernière en 1270; combien d'années ont duré ces expéditions lointaines? *Rép.* 174 ans.

Le rayon allant du centre de la terre au pôle est de 6356080 mètres; celui qui va à l'équateur est de 6377398 mètres; calculer la différence. *Rép.* 21218 mètres.

L'église Notre-Dame de Paris fut commencée en 1162; combien faut-il attendre d'années à partir de 1852, pour qu'elle ait 800 ans d'existence? *Rép.* 110 ans.

MULTIPLICATION.

21. *La multiplication a pour objet, étant donnés deux nombres, d'en trouver un troisième composé d'autant de fois le premier nombre donné qu'il y a d'unités dans le second.*

Par exemple, multiplier 54 par 28, c'est trouver un nombre composé de 28 fois 54.

Le premier nombre donné s'appelle *multiplicande*, le deuxième nombre donné *multiplicateur*, et le résultat de l'opération, *produit.*

Le multiplicande et le multiplicateur prennent aussi le nom de *facteurs* du produit.

La multiplication s'indique ainsi : 54 × 28, 54 multiplié par 28; quelquefois aussi de cette manière : 54.28 (un point entre les deux nombres).

D'après la définition, le produit de 54 par 28 s'obtiendrait en écrivant 28 nombres égaux à 54, en colonne verticale, puis, les additionnant d'après la règle connue; mais un pareil calcul serait, en général, trop long, et pourrait devenir impraticable. On a trouvé des procédés plus simples qui sont les règles de multiplication.

Nous considérons trois cas :

1° *La multiplication de deux nombres d'un seul chiffre;*

2° *La multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre;*

3° *La multiplication de deux nombres de plusieurs chiffres.*

22. 1er CAS. *La multiplication de deux nombres d'un seul chiffre ne comporte pas de simplification; c'est le cas élémentaire. On trouve le produit par voie d'addition.*

Ex. : Soit à multiplier 7 par 4.

On additionne ainsi : 7 et 7, 14; 14 et 7, 21 ; 21 et 7, 28; 28 est le produit demandé.

Les produits de deux nombres d'un seul chiffre étant d'un usage continuel, il faut les apprendre par cœur. Pour plus de commodité, on les réunit dans une table, que l'on peut former très-simplement par voie d'addition, et disposer de la manière suivante :

On décompose un carré, comme on le voit ci-dessous, au moyen de lignes horizontales et verticales, de manière à avoir neuf colonnes horizontales partagées chacune en neuf cases ou petits carrés.

Table de multiplication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Dans les cases de la 1re colonne horizontale on écrit les neuf premiers nombres; puis ajoutant chaque nombre à lui-même, on écrit le résultat au-dessous de ce nombre, dans la case correspondante de la 2e colonne horizontale. Chaque nombre de la 2e colonne est ainsi le double du nombre écrit au-dessus dans la 1re.

A chaque nombre de la 2e colonne on ajoute le nombre correspondant de la première, et on écrit la somme au-dessous de ces

2 nombres dans la case correspondante de la 8e colonne horizontale. Chaque nombre de cette nouvelle colonne horizontale est donc égal à 3 fois le nombre correspondant de la 1re.

On continue ainsi à remplir de nouvelles colonnes horizontales, en ajoutant à chaque nombre de la première colonne que l'on a formée le nombre correspondant de la 1re, et cela jusqu'à la 9e colonne horizontale inclusivement.

Pour trouver dans cette table un produit demandé, par exemple celui de 7 par 4, on cherche le multiplicande 7 dans la première colonne horizontale, et 4 parmi les nombres de la première colonne verticale à gauche; on parcourt ensuite la septième colonne verticale et la quatrième horizontale jusqu'à leur rencontre. Le nombre 28, commun à ces deux colonnes, est le produit demandé.

23. 2e CAS. *Multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre.*

Soit à multiplier 3457 par 6.

Le produit devant être la somme de 6 nombres égaux à 3457, se composera évidemment de 6 fois 7 unités, plus 6 fois 5 dizaines, plus 6 fois 4 centaines, plus 6 fois 3 mille; (on peut se figurer posée l'addition de 6 nombres égaux à 3457). Nous opérerons donc comme il suit :

$$\begin{array}{r} 3457 \\ 6 \\ \hline 20742 \end{array}$$

6 fois 7, 42; en 42 unités, il y a 2 unités et 4 dizaines; j'écris les 2 unités, et je retiens les 4 dizaines pour les ajouter au produit suivant des 5 dizaines du multiplicande par 6; 6 fois 5 font 30, et 4 de retenue, 34; en 34 dizaines, il y a 4 dizaines que j'écris à gauche du 2, et 3 centaines que je garde pour les ajouter au produit suivant; 6 fois 4, 24, et 3, 27; en 27, je pose 7 et je retiens 2; 6 fois 3 font 18, et 2 de retenue font 20; je pose 0 et j'avance 2.

RÈGLE. *Pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul, on multiplie successivement, et en procédant par ordre, de droite à gauche, chaque chiffre du multiplicande par le multiplicateur. On écrit seulement les unités de chaque pro-*

duit partiel, toujours de droite à gauche, et on retient les dizaines de chacun pour les ajouter comme unités au produit suivant; on opère ainsi jusqu'au dernier produit à gauche, que l'on écrit tout entier tel qu'on le trouve.

Ce procédé, comme on le voit, consiste à abréger l'addition des six nombres égaux à 3457 par la connaissance qu'on doit avoir des produits des nombres d'un seul chiffre.

24. 3e Cas. *Multiplication de deux nombres de plusieurs chiffres.*

Ex. : On propose de multiplier 5467 par 3428.

$$\begin{array}{r} 5467 \\ 3428 \\ \hline 43736 \\ 109340 \\ 2186800 \\ 16401000 \\ \hline 18740876 \end{array}$$

Le produit demandé doit se composer de 3428 fois 5467. Or 3428=8+20+400+3000; 3478 fois 5467 se composent de 8 fois+20 fois, plus 400 fois, plus 300 fois 5467; autrement dit, multiplier 5467 par 3428 revient à le multiplier successivement par 8, par 20, par 400, par 3000, puis à additionner les produits partiels.

Nous savons multiplier par 8; appliquant la règle du 2e cas, nous trouvons pour ce 1er produit 43736.

On aurait le produit de 5467 par 20 en faisant la somme de 20 nombres égaux à 5467 écrits en colonne verticale; mais cette série de 20 nombres peut se partager en tranches de 2 nombres chacune, et il y aura 10 de ces tranches.

$$\begin{array}{rl} 5467 & \\ 5467 & \\ \hline & 10934 \\ 5467 & \\ 5467 & \\ \hline & 10934 \\ 5467 & \\ 5467 & \\ \hline & 10934 \\ \text{etc...} & \end{array}$$

Chacune de ces tranches a pour valeur $5467 \times 2 = 10934$, que nous savons calculer; la valeur des 10 tranches ou des 20 nombres est 20 fois plus grande; on l'obtient en faisant suivre 10934 d'un zéro, (7). Ainsi $5467 \times 20 = 109340$; on écrit ce 2e produit sous le premier pour l'addition.

On aurait de même le produit de 5467 par 400, en faisant la somme de 400 nombres égaux à 5467 écrits en colonne verticale; mais cette série de 400 nombres peut se partager en 100 séries partielles, ou tranches de 4 nombres chacune; chacune de ces tranches a pour valeur $5467 \times 4 = 21868$, que nous savons calculer; les 100 tranches ou les 400 nombres ont une valeur 100 fois plus grande qui s'obtient en faisant suivre 21868 de deux zéros, (7); $5467 \times 400 = 2186800$; on écrit ce 3e produit sous les deux autres pour l'addition.

Par un raisonnement semblable, on voit que le produit de 5467 par 3000 est le produit de 5467 par 3 suivi de 3 zéros; $5467 \times 3 = 16401$; $5467 \times 3000 = 16401000$. On écrit ce 4e produit sous les trois premiers, puis on additionne. On a ainsi 18740876 pour produit de 5467 par 3428.

En écrivant ces produits partiels les uns sous les autres pour les additionner, on peut simplifier l'écriture. Dans le 2e produit partiel, le premier chiffre à droite du produit de 5467 par 2, chiffre des dizaines du multiplicateur, occupe la place des dizaines; si on la lui faisait occuper immédiatement sous le premier produit partiel sans écrire de zéro à sa droite, cela produirait le même effet pour l'addition. De même, le premier chiffre à droite du produit de 5467 par 4, chiffre des centaines du multiplicateur, occupe, dans le troisième produit partiel, la place des centaines; on peut la lui faire occuper immédiatement sous les deux premiers produits sans écrire les deux zéros à sa droite; le résultat sera encore le même lors de l'addition générale. Même observation pour la suppression des trois zéros dans le quatrième produit. L'écriture ainsi simplifiée, l'opération se présente comme il suit :

```
    5467
    3428
   -----
   43736
  10934
 21868
16401
--------
18740876
```

On est ainsi conduit à la règle suivante :

RÈGLE GÉNÉRALE. *Pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre de plusieurs chiffres, on multiplie d'abord tout le multiplicande par le chiffre des unités du multiplicateur. Puis procédant par ordre, de droite à gauche, on multiplie successivement tout le multiplicande par chacun des autres chiffres du multiplicateur; chacune des multiplications se fait d'après la règle du 2e cas. On écrit tous ces produits partiels les uns sous les autres au-dessous du premier produit obtenu, de manière que le premier chiffre à droite de chacun soit dans la colonne des unités de même ordre que celles du chiffre multiplicateur qui sert à le former. On additionne ensuite tous ces produits, dont la somme est le produit demandé.*

REMARQUE. *Un produit de deux facteurs a au plus autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs à la fois, et au moins ce nombre de chiffres diminué de 1.*

Ex. : 537×4276. Ce produit aura au plus 7 chiffres, et au moins 5.

En effet, 4276 étant compris entre 1000 et 10000, le produit de 537 par 4276 sera compris entre 537000 et 5370000; ce qui démontre la proposition.

Multiplication des nombres terminés par des zéros.

25. RÈGLE. *Pour multiplier deux nombres terminés par des zéros, on multiplie ces deux nombres, abstraction faite des zéros qui les terminent, puis on ajoute à droite du produit autant de zéros qu'il y en a dans les deux facteurs à la fois.*

Exemple :

```
    84000
    7600
    -----
     504
    608
   ---------
   658400000
```

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord qu'on ait à multiplier 84000 par 76. Ce produit est la somme de 76 nombres égaux à 84000.

```
84|000
84|000
84|000
..|...
..|...
```

Mais cette somme n'est autre chose évidemment que la somme de 76 nombres égaux à 84, suivie de 3 zéros; or $84 \times 76 = 6584$; donc $84000 \times 76 = 6584000$.

Considérons maintenant le produit de 84000 par 7600; c'est la somme de 7600 égaux à 84000; cette somme peut évidemment se décomposer en 100 sommes partielles de 76 nombres chacune. Une somme partielle de 76 nombres, c'est 84000×76 ou 6584000; la valeur des 100 sommes ou de 7600 nombres sera 100 fois plus grande, c'est-à-dire, égale à 658400000; (7).

En définitive, on a multiplié 84 par 76, ce qui a donné 6584, puis ajouté 5 zéros sur la droite, autant qu'il y en a dans les 2 facteurs; la règle est donc démontrée (*).

26. *On ne change pas la valeur d'un produit de deux facteurs en intervertissant l'ordre des facteurs.*

Ex. : $5 \times 4 = 4 \times 5$.

Écrivons sur une colonne horizontale les unités de 5, et répétons 4 fois cette colonne :

```
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
```

(*) (V. une 2e démonstration de cette règle, page 41).

En comptant les unités de ce tableau par colonnes horizontales, on trouve une colonne de 5 unités, répétée 4 fois; la somme des unités du tableau est donc égale à 5 répété 4 fois, ou à 5×4.

Si on compte les unités par colonnes verticales, on trouve une colonne verticale de 4 unités, répétée 5 fois; la somme des unités du tableau équivaut donc à 4 répété 5 fois, ou 4×5. Mais la somme de ces unités est la même dans quelque ordre que l'on additionne; donc $5 \times 4 = 4 \times 5$.

PREUVE DE LA MULTIPLICATION. *Pour faire la preuve de la multiplication, il suffit, changeant l'ordre des facteurs, de prendre le multiplicateur primitif pour multiplicande, et vice versâ; on doit trouver le même produit.*

EXERCICES.

27. Combien coûtent 78 mètres de drap à 24 fr. le mètre? Ils coûtent 78 fois 24 fr. *Rép.* 1872 fr.

Un employé reçoit 284 fr. par mois; quel est son traitement annuel? *Rép.* 3408 fr.

Combien y a-t-il de lettres dans un volume de 719 pages, dont chacune renferme 1539 lettres? *Rép.* 1106541.

Combien y a-t-il de secondes dans 1 jour 13 heures 47 minutes 21 secondes? le jour est de 24 heures, l'heure de 60 minutes, la minute de 60 secondes. *Rép.* 136041.

La lumière parcourt 77000 lieues par seconde; combien parcourt-elle de lieues par jour? *Rép.* 6652800000.

Une fontaine donne 27 litres d'eau par minute; combien en donne-t-elle par jour? *Rép.* 38884.

Une locomotive parcourt 9 lieues par heure; combien en parcourra-t-elle en 17 heures? *Rép.* 153.

La circonférence de la terre contient 360 degrés; chaque degré vaut 25 lieues communes, ou 20 lieues marines; combien y a-t-il de lieues de l'une ou l'autre espèce dans le tour de la terre? *Rép.* 9000 lieues communes, 7200 lieues marines.

Le soleil est 1384500 plus gros que la terre, qui est elle-même 80 fois plus grosse que la lune; combien de fois le soleil est-il plus gros que la lune? *Rép.* 110760000.

Le rayon de la terre est de 6368 kilomètres; la distance de la terre au soleil est de 23984 rayons terrestres; on demande en kilomètres la distance de la terre au soleil? *Rép.* 152682214.

DIVISION.

28. ***La division a pour but étant donnés deux nombres, l'un appelé*** **DIVIDENDE**, ***l'autre appelé*** **DIVISEUR**, ***d'en trouver un 3e appelé*** **QUOTIENT**, ***qui, multipliant le diviseur, ou multiplié par le diviseur, reproduise le dividende.***

Ex. : Diviser 40 par 5, c'est trouver un nombre qui multipliant 5, ou multiplié par 5, reproduise 40.

La division s'indique ainsi : 40 : 5 ou $\frac{40}{5}$; lisez 40 divisé par 5.

Puisque le dividende est égal au diviseur multiplié par le quotient, il contient le diviseur autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient. Ex. : 40 contient 5 fois 8. On peut donc dire :

La division est une opération par laquelle on cherche combien de fois un nombre appelé DIVIDENDE *contient un autre nombre appelé* DIVISEUR. De là le nom de *quotient* donné au résultat, du mot latin, *quoties*, combien de fois.

Il n'arrive pas toujours que le dividende soit le produit exact du diviseur par l'un des nombres 1, 2, 3, 4;... c'est même le contraire qui arrive le plus ordinairement. Ex. : division de 42 par 5.

Alors le dividende contient un certain nombre de fois le diviseur, plus un *reste* moindre que le diviseur. Ex. : 42 contient 8 fois 5, plus un reste 2, moindre que 5.

Alors le quotient peut être considéré comme composé de deux parties; l'une, sa *partie entière*, est le plus grand nombre de fois que le dividende contient le diviseur, (dans notre exemple, cette partie entière est 8); l'autre est un nombre moindre que 1, qu'on nomme *fraction*, et dont il sera question plus tard.

On appelle *reste* d'une division le nombre moindre que le diviseur, qu'on obtient en retranchant du dividende le produit du diviseur par la *partie entière* du quotient. Dans notre exemple, le reste est 2.

Dans ce qui va suivre, nous nous occuperons seulement de trouver la *partie entière* du quotient de chaque division proposée; plus tard, au chapitre des fractions, nous apprendrons à trouver la seconde partie quand il y en aura une.

Ainsi donc, pour le moment, en divisant deux nombres donnés,

nous chercherons seulement combien de fois au plus le dividende contient le diviseur.

29. *On peut trouver ce nombre de fois en ne faisant que des soustractions.*

En effet, soit proposé de chercher combien de fois au plus 42 contient 5. On ôte 5 de 42, il reste 37; puis 5 de 37, il reste 32, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait un reste moindre que 5. Après 8 soustractions, on arrive au reste 2; on en conclut que 42 contient 8 fois 5 et un reste 2. On dit que la division de 42 par 5 donne le quotient entier 8 et un reste 2. On dit encore que 8 est le quotient de 42 par 5, à moins d'une unité, à une unité près.

30. Mais l'emploi de la soustraction est un moyen trop long, et peut devenir par cela même impraticable. On a cherché d'autres procédés, ou règles de division.

Nous considérerons trois cas :

1° *Celui où le diviseur n'ayant qu'un chiffre, le dividende ne contient pas dix fois le diviseur;*

2° *Celui où les deux termes étant des nombres entiers quelconques, le dividende ne contient pas dix fois le diviseur;*

3° *Celui où les deux termes étant des nombres entiers quelconques, le dividende contient au moins dix fois le diviseur.*

On distinguera facilement ces trois cas, *en comparant au dividende le diviseur suivi d'un zéro.*

31. 1er CAS. Soit 47 à diviser par 9.

On doit savoir par cœur les produits de 9 par les nombres d'un seul chiffre. Quand on ne connaît pas ces produits, on les forme dans l'ordre des grandeurs croissantes, jusqu'à ce qu'on en trouve un qui dépasse le dividende 47; de toutes manières on voit facilement que 9×5 est le plus grand de ces produits contenus dans 47 (*). On en conclut que 5 est le quotient entier de 47 par 9, et que la division donne un reste 2.

32. 2e CAS. Soit 4376 à diviser par 824.

(*) *Si l'on a une table de Pythagore, on jette les yeux sur les produits de 9 par les neuf premiers nombres (9e colonne verticale, ou horizontale), et on voit quel est le plus grand de ces produits contenu dans le dividende 47.*

4376 ne vaut pas 10 fois 824 ; le quotient cherché est un nombre d'un chiffre. On pourrait, suivant une marche analogue à la précédente, chercher parmi les produits du diviseur par les nombres d'un seul chiffre quel est le plus grand contenu dans 4376 ; mais comme on ne connaît pas ces produits de mémoire, il faudrait les calculer exprès ; ce qui deviendrait trop long ; et équivaudrait à peu près à l'emploi de la soustraction.

Voici comment on a raisonné pour trouver un moyen plus expéditif. Le dividende contient les produits partiels des unités, des dizaines et des centaines du diviseur par le chiffre du quotient ; le produit des 8 centaines du diviseur par ce quotient est un nombre exact de centaines, tout entier contenu dans les 43 centaines du dividende. 43 centaines contenant ce produit lui est égal ou supérieur ; si donc on divise 43 centaines par l'un de ses facteurs, par 8 centaines, on aura un quotient égal ou supérieur à l'autre facteur, qui est le quotient cherché de 4376 par 824. Essayons. En 43 centaines, combien de fois 8 centaines, ou bien en 43 combien de fois 8 ? 5 fois. Si 5 est bien le chiffre cherché, le produit de 824 par 5 doit être contenu dans 4376. C'est ce qui arrive, $824 \times 5 = 4120$; en retranchant ce produit de 4376, on a pour reste 256. On dit que 4376 divisé par 824 donne un *quotient entier* 5 avec un reste 256.

Ce raisonnement conduit toujours à la règle générale que voici.

RÈGLE. *Pour faire une division de nombres entiers, quand le quotient ne doit avoir qu'un chiffre, on sépare sur la droite du dividende autant de chiffres, moins un, qu'il y en a dans le diviseur ; on divise le nombre restant à gauche par le premier chiffre à gauche du diviseur ; le quotient entier de cette division est le quotient cherché, ou un nombre plus fort ; pour l'essayer, on multiplie le diviseur par ce quotient entier. Si le produit ne surpasse pas le dividende, le quotient trouvé est exact ; si le produit obtenu est plus fort que le dividende, c'est que le quotient essayé est trop fort ; on le diminue d'une unité, et on essaye, de la même manière, le chiffre diminué ; et ainsi de suite, si ce dernier chiffre était encore trop fort. Quelquefois on croit pouvoir diminuer de plus d'une unité le chiffre trouvé trop fort ; on risque alors d'en prendre un trop faible. Un chiffre est trop faible, quand le reste obtenu, en*

retranchant du dividende le produit du diviseur par ce chiffre, n'est plus inférieur au diviseur. En effet, le dividende D est égal au diviseur d multiplié par le chiffre essayé c, plus le reste r, $D = d \times c + r$.

Si ce reste r est un nombre au moins égal au diviseur d, le dividende D contient le diviseur au moins $c + 1$ fois; d'où il suit que le quotient entier serait alors au moins égal à $c + 1$, c est un chiffre trop faible; on l'augmente, et on essaye le nouveau chiffre; ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait trouvé un reste moindre que le diviseur.

53. Le 3e cas de la division se ramène au 2e; un quotient quelconque de plusieurs chiffres s'obtient par une série de divisions partielles dont chacune fournit un de ces chiffres pour quotient; on ne trouvera donc pas inutile que nous nous arrêtions un peu sur la pratique de l'opération dans ce 2e cas.

Voici une disposition du calcul:

4376	824
4120	5
256	

4120 est le produit du diviseur par le quotient.

Mais on se dispense le plus souvent d'écrire ce produit sous le dividende. *Multipliant successivement par le quotient les unités simples, dizaines et centaines du diviseur, on retranche chacun de ces produits, aussitôt qu'il est calculé, des unités de même ordre que lui dans le dividende. On augmente chaque chiffre du dividende d'autant de fois dix unités qu'il est nécessaire pour rendre la soustraction possible, en ayant soin d'ajouter au produit, que l'on retranche immédiatement après, autant d'unités qu'on a dû ajouter ainsi de dizaines.* L'application suivante fera bien comprendre cette règle.

4376	824
256	5

On s'énonce ainsi:

5 fois 4, 20 ; 20 ôtés de 26, il reste 6, et l'on retient 2.
5 fois 2, 10 et 2, 12 ; 12 ôtés de 17, il reste 5, et on retient 1
5 fois 8, 40 et 1, 41 ; 41 ôtés de 43, il reste 2.

Essai du quotient. Il est bon de ne rien écrire sous le diviseur, ni sous le dividende, avant que l'on ne soit tout à fait, ou à très-peu près, sûr d'avoir trouvé le véritable quotient ; autrement on pourrait avoir, même plusieurs fois, à effacer ou surcharger les chiffres déjà écrits.

Pour acquérir cette certitude plus ou moins absolue de l'exactitude du quotient, on l'essaye ordinairement sans rien écrire ni sous le dividende ni sous le diviseur. Cet essai peut se faire de diverses manières.

On peut faire de mémoire, et sans rien écrire, les multiplications et soustractions successives qui viennent d'être indiquées ; si la dernière soustraction peut se faire, on est sûr que le quotient essayé n'est pas trop fort ; si on sait d'ailleurs qu'il n'est pas trop faible, on est sûr de son exactitude. Alors, on l'écrit sous le diviseur, et on recommence, mais en écrivant cette fois les restes, les mêmes opérations qu'on vient de faire sans rien écrire.

Mais on opère rarement ainsi ; car, si le chiffre essayé est trop fort, on ne le sait qu'après avoir opéré sur tous les chiffres du diviseur et du dividende.

Le plus souvent, dans cet essai, on n'opère que sur les deux ou trois premiers chiffres à gauche du diviseur et les unités de même ordre du dividende, comme il suit :

578421	87534

En 57 combien de fois 8 ? 7 fois. Pour essayer 7, on dira : 7 fois 7, 49 ; 49 ôtés de 58, reste 9, et on retient 5 ; 7 fois 8, 56, et 5, 61 ; ôter 61 de 56, impossible. 7 est trop fort ; il faut essayer 6. Nous nous sommes contentés d'opérer sur les deux premiers chiffres à gauche du diviseur ; cela suffit le plus souvent ; pour plus de sûreté, on en pourrait considérer trois. Après cela, on n'est encore qu'à peu près sûr de l'exactitude du quotient ; mais il est rare que cela ne suffise pas.

34. 3e CAS. Soit à diviser 547648 par 874.

```
547648 | 876
5256   |----
       | 625
------
 22048
 1752
------
  4528
  4380
------
Reste. . .  148
```

$$547648 = 876 \times 625 + 148.$$

On prend sur la gauche du dividende assez de chiffres pour avoir un nombre qui contienne le diviseur au moins une fois et moins de dix fois ; le nombre ainsi séparé est 5476 ; on divise 5476 par 876 (règle du 2e cas) ; le quotient de cette division est 6. Cette division nous apprend que 5476 est compris entre 876×6 et 876×7.

876×6 étant contenu dans 5476, 876×600 est contenu dans 547600, et, à plus forte raison, dans 547648 ; le dividende 547648 contenant 600 fois le diviseur, le quotient cherché vaut au moins 600.

876×7 étant plus grand que 5476, est au moins égal à 5477 ; 876×700 est donc au moins égal à 547700, et par suite, plus grand que 547648 ; le dividende 547648 ne contenant pas 700 fois le diviseur 876, le quotient cherché est moindre que 700.

Ce quotient étant compris entre 600 et 700, se compose de 6 centaines, plus un certain nombre de dizaines et un certain nombre d'unités, chacun moindre que dix, qui nous restent à trouver. Pour cela, remarquant que le dividende contient les produits du diviseur 876, par les six centaines, les dizaines et les unités, plus peut-être un reste moindre que le diviseur ; nous simplifierons en diminuant le dividende de la première partie, 876×6 centaines $=$ 5256 centaines. Ces centaines se retranchent directement des 5476 centaines du dividende ; on a ainsi pour reste 220 centaines qui, jointes aux 48 unités restées à part dans le dividende, composent un reste total 22048. Ce reste 22048 contient encore d'après ce qui précède, les produits du diviseur 876 par

les dizaines et les unités du quotient, plus peut-être un nombre moindre que le diviseur.

Le produit de 876 par les dizaines du quotient, nombre exact de dizaines terminé par un zéro, est tout entier contenu dans les 2204 dizaines du reste; abstraction faite d'un zéro de part et d'autre, le produit du diviseur par le *chiffre* des dizaines du quotient est donc contenu dans 2204. On est ainsi conduit à diviser 2204 par 876 (*). Cette division, qui rentre dans le 2ᵉ cas, donne le quotient 2. Par un raisonnement semblable à celui qui a été fait après la division de 5476 par 876, on prouve facilement que 2 est exactement le chiffre des dizaines du quotient cherché. On écrit ce chiffre sous le diviseur, à droite du chiffre 6 des centaines déjà trouvé; puis, multipliant 876 par 2 dizaines, on retranche le produit du dividende; 876 × 2 dizaines = 1752 dizaines. Ces 1752 dizaines se retranchent directement des 2204 dizaines de 22048; il reste 452 dizaines qui, jointes aux 8 unités restées à part, composent un 2ᵉ reste 4528. Comme on a retranché successivement du dividende le produit du diviseur par les centaines et les dizaines du quotient, le reste 4528 ne contient plus que le produit du diviseur par les unités, plus peut-être un reste moindre que le diviseur. Le chiffre des unités qui nous reste à trouver est donc le plus grand nombre de fois que 4528 contient le diviseur 876; on obtiendra donc ce dernier chiffre en divisant 4528 par 876, toujours d'après la règle du 2ᵉ cas. On trouve ainsi le quotient 5, que l'on met à la droite du nombre 62, déjà écrit au quotient de la division principale. Le quotient de cette division de 547648 par 876 est maintenant connu; c'est 625. En formant le produit de 876 par 5, et retranchant ce produit 4380 de 4528, nous aurons pour reste l'excès du dividende 547648 sur le produit de 876 par le quotient 625. Ce reste 148 est le reste final, ou simplement le reste de la division de 547648 par 876.

Du raisonnement que nous venons de faire, on déduit facilement une règle générale pour effectuer la division de deux nombres entiers.

(*) A côté des 220 centaines, on a tout à l'heure abaissé 48. Le raisonnement actuel nous conduit à séparer sur la droite de 22048 les unités d'ordre inférieur aux dizaines; on n'emploie donc dans la 2ᵉ division que l'un des chiffres que l'on vient d'abaisser. Aussi dans la pratique n'abaisse-t-on qu'un seul chiffre à droite de 220. (V. la Règle.)

Avant de l'exposer, mentionnons une remarque qu'on a pu faire.

On obtient toujours *le reste* correspondant à un chiffre du quotient que l'on considère, en retranchant le produit du diviseur par ce chiffre, du dividende partiel qui a fourni ce chiffre, et abaissant à la droite du reste les chiffres non employés du dividende principal.

RÈGLE. *Pour diviser deux nombres entiers, quand le dividende vaut au moins dix fois le diviseur, on sépare, sur la gauche du dividende, assez de chiffres pour avoir un nombre qui contienne, au moins une fois et moins de dix fois, le diviseur; on divise le nombre séparé à gauche par le diviseur, d'après la règle du deuxième cas, et on écrit le chiffre fourni par cette division à la place marquée pour le quotient que l'on cherche; c'est le chiffre des plus hautes unités du quotient. On multiplie le diviseur par ce chiffre, et on retranche le produit du dividende partiel employé; à droite du reste, on abaisse le premier chiffre qui suit ce dividende partiel dans le dividende principal, puis on divise le nombre ainsi formé par le diviseur; le chiffre qui résulte de cette division s'écrit à la droite du premier chiffre déjà écrit au quotient; on multiplie le diviseur par ce deuxième chiffre, puis on retranche ce produit du second dividende partiel; à droite du reste, on abaisse le chiffre du dividende principal qui vient après le premier chiffre abaissé, et on a un troisième dividende partiel que l'on divise par le diviseur; on continue de la même manière jusqu'à ce qu'on ait abaissé et employé tous les chiffres du dividende principal.*

S'il arrivait qu'un dividende partiel ne contînt pas le diviseur, c'est que le quotient ne contiendrait pas d'unités de l'ordre du dernier chiffre abaissé (*)*; on mettrait un zéro au quotient, et considérant le dividende partiel comme un reste, on abaisserait à sa droite le chiffre suivant du dividende principal pour continuer la division.*

Chaque reste doit être moindre que le diviseur, puisque chaque chiffre écrit au quotient doit exprimer le plus grand nombre

(*) Cela résulte du raisonnement; s'il y avait seulement une unité de cet ordre, le dividende partiel contiendrait au moins le produit du diviseur par 1, c'est-à-dire contiendrait le diviseur (page 30).

entier de fois que le dividende partiel considéré contient le diviseur. Si un reste était plus grand que le diviseur, le dividende contiendrait le diviseur au moins une fois de plus qu'on ne l'a marqué; le chiffre écrit en dernier lieu au quotient serait trop faible au moins d'une unité; il faudrait l'augmenter, et vérifier le nouveau chiffre.

Ces remarques sont des conséquences évidentes du raisonnement général.

Voici l'opération exécutée d'après la règle et avec la simplification d'écriture indiquée dans le n° 33 :

547648	876
2204	625
4528	
148	

35. On peut simplifier la division dans le cas où le diviseur n'a *qu'un* chiffre et le dividende *plusieurs*.

Cette simplification consiste à n'écrire ni les restes ni les dividendes partiels successifs. Nous allons expliquer sur un exemple la marche à suivre.

37853	8
5	4731

En 37 il y a 4 fois 8 et un reste 5 qui, suivi du 8, forme un 2e dividende partiel, 58; en 58 il y a 7 fois 8 et 2 de reste, qui, avec le 5 suivant, forme 25; en 25 il y a 3 fois 8 et 1 de reste qui avec le 3 suivant forme 13; en 13 il y a 1 fois 8 et 5 de reste. Les quotients partiels 4, 7, 3, 1 ayant été écrits les uns à la droite des autres, on trouve le quotient 4731, et le reste 5.

UTILITÉ D'UNE TABLE DES NEUF PREMIERS MULTIPLES DU DIVISEUR.

36. Si le quotient d'une division doit avoir un grand nombre de chiffres, il est commode d'avoir à sa disposition le tableau des multiples du diviseur par les neuf premiers nombres : 1, 2, 3, .. 9. Ce tableau se forme par de simples additions; on ajoute le divi-

seur à lui-même, puis le diviseur à cette première somme, puis le diviseur à la seconde somme, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait une somme égale à neuf fois le diviseur. On a ainsi les multiples du diviseur par 1, 2, 3, 4... 9.

Ayant ce tableau devant les yeux, on connait immédiatement chaque chiffre du quotient à la seule inspection du dividende partiel qui doit le fournir; car on voit quel est le plus grand multiple du diviseur contenu dans ce dividende partiel. Connaissant sans calcul chaque chiffre du quotient et le produit du diviseur par ce chiffre, au lieu d'une division du 2ᵉ cas, d'une multiplication et d'une soustraction, on a tout simplement une soustraction à faire.

Le tableau susdit simplifie donc beaucoup la division quand le quotient doit avoir beaucoup de chiffres.

Voici un exemple :

5738.42684254 | 874
5244 | 656570576

4944
4370

5742
5244

4986
4370

6168
6118

5042
4370

6785
6118

6074
5244

830

1.	874
2. . . .	1748
3. . . .	2622
4. . . .	3496
5. . . .	4370
6. . . .	5244
7. . . .	6118
8. . . .	6992
9. . . .	7866

L'explication de cette opération est trop simple pour que nous nous y arrêtions.

PREUVES DE LA DIVISION ET DE LA MULTIPLICATION.

37. On fait la preuve de la division en multipliant le diviseur par le quotient, puis ajoutant le reste au produit : le résultat doit être exactement égal au dividende.

On peut faire la preuve d'une multiplication en divisant le produit par l'un des facteurs ; on doit trouver pour quotient l'autre facteur, sans reste.

38. *Usages de la division.* Pour savoir bien reconnaître dans la pratique les cas où la division doit s'appliquer, il faut naturellement s'attacher à bien comprendre sa définition. La division a pour objet, étant donnés deux nombres, l'un appelé *dividende*, l'autre *diviseur*, d'en trouver un 3e nommé *quotient*, qui, multipliant le diviseur ou multiplié par le *diviseur*, reproduise le dividende. Partant de là : 1° si on considère le quotient comme multipliant le diviseur, on peut dire : *faire la division, c'est chercher combien de fois un nombre, le diviseur, est contenu dans un autre, le dividende.*

2° Si on considère, au contraire, le quotient comme multiplié par le diviseur, on peut dire : *faire une division, c'est chercher un nombre qui soit contenu dans le dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le diviseur.*

Ou bien, *le dividende se compose d'autant de parties égales au quotient qu'il y a d'unités dans le diviseur.*

39. Ceci bien compris, on reconnaîtra facilement que la division doit être employée dans les cas suivants, entre autres :

1° On connaît le prix d'un objet ; combien aura-t-on de ces objets pour une somme fixée? Ex : Le mètre d'une étoffe coûte 20 fr.; combien aura-t-on de mètres pour 600 fr. ?

R. Évidemment autant de mètres qu'il y a de fois 20 fr. dans 600 fr. On divisera 600 fr. par 20 ; (38, 1°).

2° Pour une somme donnée on a eu un nombre connu d'objets ; combien coûte un objet? Ex. : Pour 600 fr. on a eu 30 mètres d'étoffe ; combien coûte le mètre ?

600 fr. se composent de 30 fois le prix du mètre ; il faut trouver le nombre qui est contenu 30 fois dans 600 ; on divisera donc encore 600 par 30 ; (38, 2°).

3° *La division sert à partager un nombre donné en autant de*

parties égales qu'il y a d'unités dans un autre nombre donné. Ex. : Partager également 40 fr. entre 5 personnes; il faut trouver la part de chaque personne ; il y a 5 parts égales à celle-là dans 40 fr. Le nombre cherché étant contenu 5 fois dans 40, on le trouvera en divisant 40 par 5 ; (38, 2°).

Nous ferons remarquer ce dernier usage de la division.

C'est à ce point de vue qu'on a dû primitivement envisager cette opération ; car son nom même, *division*, signifie *partage ; dividende*, qui doit être partagé ; *diviseur*, qui divise ou partage.

EXERCICES.

40. Quelqu'un a 2595 fr. de revenu. Combien peut-il dépenser par jour l'un dans l'autre, en mettant de côté 1500 fr. par an ? (L'année est de 365 jours.) *Rép.* 3 fr.

Un particulier qui a 6000 fr. de revenu doit une somme de 23500 fr., qu'il est convenu d'acquitter en dix payements égaux, d'année en année. Ses engagements remplis chaque année, combien lui restera-t-il à dépenser par jour ? *Rép.* 10 fr.

Un ouvrier a reçu pour un ouvrage qu'il a fait en 8 jours, en travaillant 7 heures par jour, une somme de 168 francs ; combien chaque heure de travail lui a-t-elle été payée ? *Rép.* 3 fr.

Deux convois partent en même temps de Paris et Strasbourg ; l'un fait 43 kilomètres à l'heure ; l'autre en fait 57 ; la distance des deux villes, par le chemin de fer, est de 500 kilomètres ; après combien d'heures les deux convois se rencontreront-ils ?

Les convois se rapprochent de 100 kilomètres par heure, et sont au départ distants de 500 kilomètres, donc, etc. *Rép.* 5 heures.

Combien y a-t-il de minutes et d'heures dans 548342 secondes ? *Rép.* 152 h. 19 m. 2 s.

La circonférence de la terre comprenant 360 degrés, et chaque degré 25 lieues, combien faudra-t-il de temps pour faire le tour de la terre à un homme qui ferait, sans s'arrêter, une lieue par heure ? *Rép.* 375 jours.

La distance du soleil à la terre est de 23984 rayons terrestres de 6366666 mètres chacun ; combien faudrait-il de temps au son qui parcourt 340 mètres par seconde pour parvenir du soleil à la terre ? *Rép.* 5198j 1h 21m 49s.

En 1846 la population entière de la France était de 35401761 habitants ; sa superficie est de 527686 kilomètres carrés ; combien y a-t-il moyennement d'habitants par kilomètre carré ? *Rép.* 67.

En 1850 il s'est consommé à Paris 5374347000 grammes de sel ; la population étant de 1053897 habitants ; combien de grammes de sel ont été moyennement consommés par chaque habitant ? *Rép.* 5000.

LIVRE II.

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES NOMBRES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX QUATRE OPÉRATIONS.

41. *Explication de quelques signes et termes usités.* Nous avons fait connaître les signes qui indiquaient l'addition, (+), la soustraction, (—), la multiplication, (×), la division, (:), l'élévation aux puissances, (emploi de l'exposant).

Quand on veut indiquer une opération sur des nombres dont l'un est une somme, ou une différence, ou un produit, ou un quotient non effectué, on écrit ce nombre entre deux parenthèses ( ). Ainsi, pour indiquer que la somme 6 + 19, effectuée, doit être multipliée par 5, on écrira (6 + 19) × 5; pour indiquer que de la somme 6 + 19, effectuée, doit être retranchée la différence 17 — 14, effectuée, on écrira (6 + 19) — (17 — 14); de même (6 + 19) × (17 — 14) indique la multiplication de 6 + 19 par 17 — 14; $(6 + 19)^3$ indique que la somme 6 + 19 doit être élevée à la 3e puissance.

Pour exprimer l'égalité, on se sert de ce signe =, qui s'énonce *égale*. 5 + 7 + 8 = 20 signifie que la somme des nombres 5, 7, 8, est égale à 20.

Pour exprimer l'inégalité, on se sert de ce signe >, qui signifie *plus grand que*, ou du signe <, qui signifie *plus petit que*.

$$(3 \times 4) > 9;\ (3 \times 4) < 20.$$

Les nombres ou résultats d'opération dont on exprime ainsi l'égalité ou l'inégalité sont dits les *membres* de l'égalité ou de l'inégalité.

On nomme *théorème* une vérité qui n'est pas évidente par elle-même, mais qui le devient à l'aide d'une démonstration. Ex. : Le principe du n° 26 est un théorème.

Un *corollaire* est une conséquence d'un théorème, qui s'en déduit aisément, sans démonstration, ou à peu près. V. ci-après, n° 47.

THÉORÈMES RELATIFS A LA MULTIPLICATION.

42. THÉORÈME I. *On multiplie une somme par un nombre en multipliant chacune de ses parties par ce nombre et additionnant ensuite les produits partiels.*

Ex. : Soit à multiplier $5 + 9 + 8$ par 4.

Ce produit est la somme des nombres du tableau suivant.

$$\begin{array}{c} 5+9+8 \\ 5+9+8 \\ 5+9+8 \\ 5+9+8 \\ \hline \end{array}$$

Cette somme se compose évidemment de 5 répété 4 fois, ou 5×4, plus 9×4, plus 8×4; donc

$$(5+9+8) \times 4 = 5 \times 4 + 9 \times 4 + 8 \times 4. \quad (1)$$

De l'égalité (1), en changeant l'ordre des facteurs (26), on déduit :

$$4 \times (5+9+8) = 4 \times 5 + 4 \times 9 + 4 \times 8.$$

De là un théorème facile à énoncer.

43. THÉORÈME II. *On multiplie la différence de deux nombres par un troisième, en multipliant les deux nombres par ce troisième et retranchant le plus petit produit du plus grand.*

Ex. : $30 - 18 = 12$; il s'agit de démontrer que

$$30 \times 5 - 18 \times 5 = 12 \times 5. \quad (2)$$

Il suffit de démontrer que $30 \times 5 = 18 \times 5 + 12 \times 5$; or, puisque $30 = 18 + 12$; $30 = 18 + 12$, d'où, par application du théorème I, on déduit $30 \times 5 = 18 \times 5 + 12 \times 5$.

44. DÉFINITION. On nomme produit de plusieurs nombres, ou de plusieurs *facteurs*, le produit qu'on obtient en multipliant le premier de ces nombres par le second; le produit obtenu par le troisième nombre, le nouveau produit par le quatrième nombre; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé tous les facteurs.

45. THÉORÈME III. *Dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs d'une manière quelconque sans changer le produit.*

La démonstration de ce théorème fondamental, déjà établi, n° 26, pour deux facteurs, se composera de trois parties.

1° *Un produit de trois facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des deux derniers facteurs.*

Ex. : $$9 \times 5 \times 4 = 9 \times 4 \times 5.$$

En effet, $9 \times 5 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9$. Écrivons cette somme 4 fois comme il est indiqué ci-dessous :

$$\begin{array}{c} 9 + 9 + 9 + 9 + 9 \\ 9 + 9 + 9 + 9 + 9 \\ 9 + 9 + 9 + 9 + 9 \\ 9 + 9 + 9 + 9 + 9 \end{array}$$

La somme des nombres d'une colonne horizontale est 5 fois 9 ou 9×5. Il y a quatre colonnes horizontales; la somme des nombres de tout le tableau est donc égale à 9×5 répété 4 fois, c'est-à-dire, à $9 \times 5 \times 4$. Mais si, d'un autre côté, on additionne par colonnes verticales, on trouve dans chaque colonne verticale 4 fois 9 ou 9×4; il y a cinq colonnes verticales; la somme des nombres du tableau est donc aussi égale à 9×4, répété 5 fois, c'est-à-dire à $9 \times 4 \times 5$; donc

$$9 \times 5 \times 4 = 9 \times 4 \times 5.$$

2° *Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques.*

Ex. : Dans le produit $7 \times 3 \times 6 \times 5 \times 4 \times 19 \times 23$, on peut intervertir l'ordre des facteurs 5 et 4 ; ainsi ;

$$(1) \quad 7 \times 3 \times 6 \times 5 \times 4 \times 19 \times 23 = 7 \times 3 \times 6 \times 4 \times 5 \times 19 \times 23.$$

Nous pouvons laisser de côté les facteurs qui, de part et d'autre, viennent après 5 et 4, et nous borner à démontrer l'égalité,

$$(2) \quad 7 \times 3 \times 6 \times 5 \times 4 = 7 \times 3 \times 6 \times 4 \times 5:$$

En effet, si ces deux derniers produits sont reconnus égaux, les deux produits (1), qu'on obtient en multipliant ceux-ci par les mêmes facteurs, 19×23, seront évidemment égaux.

Occupons-nous donc des produits (2) ; ils commencent tous deux par $7 \times 3 \times 6$; effectuons ce produit : $7 \times 3 \times 6 = 126$.

Donc, $\quad 7 \times 3 \times 6 \times 5 \times 4 = 126 \times 5 \times 4;$

et $\quad 7 \times 3 \times 6 \times 4 \times 5 = 126 \times 4 \times 5.$

Démontrer l'égalité (2) revient donc à démontrer celle-ci :

$$(3) \quad 126 \times 5 \times 4 = 126 \times 4 \times 5.$$

Or, cette égalité est vraie d'après 1° ; donc l'égalité (2) est vraie ; et par suite, l'égalité (1) ; on peut donc intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques.

3° *Dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.*

En effet, changer l'ordre des facteurs d'un produit donné revient toujours à mettre un facteur désigné de ce produit à la première place, un autre également désigné à la seconde place, etc. Or, considérant dans le 1er produit le facteur désigné pour occuper la première place dans le second, on peut d'abord le faire changer de place avec le facteur qui le précède immédiatement, puis le faire changer avec son nouveau voisin de gauche, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il soit arrivé à la première place. Dans le produit ainsi disposé, on cherchera de même le facteur désigné pour occuper définitivement la seconde place, et on l'y fera arriver de la même manière ; ainsi de suite. Tous les facteurs pourront être successivement amenés à leurs places désignées.

46. THÉORÈME IV. *Pour multiplier un nombre par un produit de plusieurs facteurs, on peut multiplier ce nombre par le premier facteur, le produit obtenu par le second facteur, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les facteurs aient été employés.*

Ex. : $60 = 3 \times 4 \times 5$. Multiplier 37 par 60 revient à multiplier 37 par 3, puis le produit obtenu par 4, et enfin ce deuxième produit par 5, ce qu'on exprime ainsi :

$$37 \times 60 = 37 \times 3 \times 4 \times 5.$$

En effet : $37 \times 60 = 60 \times 37 = 3 \times 4 \times 5 \times 37.$

Mais $3 \times 4 \times 5 \times 37 = 37 \times 3 \times 4 \times 5.$

Donc $37 \times 60 = 37 \times 3 \times 4 \times 5.$

Ce qu'il fallait démontrer.

47. COROLLAIRE I. *On multiplie ou divise un produit par un nombre en multipliant ou divisant un de ses facteurs par le nombre.*

Ex. : $21 = 7 \times 3$. $19 \times 21 = 19 \times 7 \times 3$. (Théor. IV.)

Le produit de 19 par 21 est donc trois fois plus grand que celui de 19×7, ou si l'on veut, le produit de 19 par 7 est 3 fois plus petit que celui de 19 par 21.

48. COROLLAIRE II. *Pour multiplier deux produits l'un par l'autre, il suffit de former un produit unique avec les facteurs du multiplicande et ceux du multiplicateur.*

Ex. : $(9 \times 7 \times 8) \times (18 \times 13 \times 5) = 9 \times 7 \times 8 \times 18 \times 13 \times 5.$

Cette égalité résulte de la définition, (44), et du théorème IV, n° 46.

Ce corollaire s'étend évidemment à la multiplication de plusieurs produits.

49. COROLLAIRE III. *Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut remplacer un nombre quelconque de facteurs par leur produit effectué.*

En effet, on peut d'abord rendre ces facteurs consécutifs et leur donner les premières places; alors ils peuvent évidemment être remplacés par leur produit que l'on met ensuite à la place que l'on veut.

Applications.

50. 1° Multiplication de deux nombres terminés par des zéros.
Ex. : 84000 × 7600.

84000 × 7600 = 84 × 1000 × 76 × 100 = 84 × 76 × 1000 × 100.

On multipliera 84 par 76 et on fera suivre le produit de 3 + 2 ou 5 zéros. D'où la règle indiquée n° 25.

51. 2° Il y a quelquefois dans un produit des facteurs qui, groupés et multipliés, donnent pour produit un nombre par lequel la multiplication est très-facile; alors il y a avantage évident à remplacer ces facteurs par leur produit effectué.

$$247 \times 2 \times 19 \times 5 \times 4 \times 25.$$

2 × 5 = 10 ; 4 × 25 = 100 ; le produit donné équivaut à 247 × 19 × 10 × 100.

379 × 3 × 4 × 5 × 15 ; 4 × 5 = 20 ; 15 × 3 = 45 ; 45 × 20 = 900.

Il sera plus court de multiplier 379 par 900.

En général, quand on a 2 ou 3 facteurs d'un seul chiffre, il est plus simple de les multiplier entre eux pour employer leur produit à leur place.

PRINCIPES RELATIFS A LA DIVISION.

52. *En multipliant ou en divisant par un même nombre les deux termes d'une division qui se fait sans reste, on ne change pas le quotient.*

Ainsi, supposons que 120 : 12 = 10. Je dis que si l'on divise 120 × 3 par 12 × 3, le quotient sera encore 10.

En effet, par définition, nous avons 120 = 12 × 10 ; d'où 120 × 3 = 12 × 10 × 3 = (12 × 3) × 10.

Égalité qui démontre ce qu'on a avancé; car elle équivaut à celle-ci : $\frac{120 \times 3}{12 \times 3} = 10.$

Même démonstration dans le cas où l'on diviserait les deux termes par un même nombre.

53. Théorème V. *Une division ayant donné un reste, si on multiplie ou si on divise les deux termes par un même nombre, le quotient entier ne change pas, mais le reste est multiplié ou divisé par ce nombre.*

Par exemple, la division de 128 par 12 a donné un quotient entier 10 et un reste 8 ; si je multiplie 128 et 12 tous deux par 3, et si je divise les deux produits l'un par l'autre, j'aurai un *quotient entier* égal à 10, et un reste égal à 8 × 3.

En effet, d'après la première division 128 = 12 × 10 + 8.

Multiplions les deux membres de cette égalité par 3, nous aurons 128 × 3 = 12 × 10 × 3 + 8 × 3, ou 128 × 3 = (12 × 3) × 10 + 8 × 3. Égalité qui démontre que 128 × 3 contient 10 fois (12 × 3), et pas une fois de plus ; car 8 étant moindre que 12, 8 × 3 est moindre que 12 × 3. Le quotient entier de la division de 128 × 3 par 12 × 3 est donc 10 et le reste 8 × 3.

On démontrerait de même pour le cas où l'on diviserait *exactement* les deux termes de la division par un même nombre.

Ce principe est d'ailleurs une conséquence de l'autre.

Application. Si on doit diviser l'un par l'autre deux nombres terminés par des zéros, Ex. : 54632000 par 8700, on peut supprimer, sur la droite des 2 nombres, autant de zéros qu'il y en a à la fin de celui des deux qui en a le moins, (deux dans notre exemple), puis faire la division ; le quotient est celui des 2 nombres proposés ; mais il faut ajouter à la droite du reste les 2 zéros supprimés.

54. Théorème VI. *Pour trouver le quotient entier de la division d'un nombre par le produit effectué de plusieurs facteurs, on peut diviser le nombre donné par le premier facteur ; le quotient entier obtenu par un deuxième facteur, le nouveau quotient par un troisième facteur, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé tous les facteurs. Le dernier quotient entier obtenu est le quotient demandé.*

Nous supposons qu'aucune de ces divisions successives ne donne de reste. Soit, par exemple, 420 à diviser par 60 = 3 × 4 × 5. Soit q le quotient exact de 420 par 3 ; q' le quotient exact de q par 4, et enfin q'' celui de q' par 5, nous avons :

$$420 = 3 \times q$$
$$q = 4 \times q'$$
$$q' = 5 \times q''$$

Remplaçant q par sa valeur dans la première égalité, on a $420 = 3 \times 4 \times q'$; remplaçant q' par sa valeur dans cette dernière égalité, on trouve $420 = 3 \times 4 \times 5 \times q'' = 60 \times q''$. Le quotient de 420 par 60 est donc q''. Ce qu'il fallait prouver.

DES PUISSANCES D'UN NOMBRE.

55. *On appelle puissance d'un nombre un produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre.*

Ainsi la quatrième puissance de 17 n'est autre chose que le produit effectué $17 \times 17 \times 17 \times 17$. *Le nombre de ces facteurs est le degré de la puissance.*

Une puissance d'un nombre s'indique par un chiffre écrit à la droite et un peu au dessus de ce nombre ; ainsi la quatrième puissance de 17 s'indique ainsi : 17^4. Ce chiffre 4 s'appelle l'*exposant* ; il indique le degré de la puissance. Par analogie, le nombre 17 s'appelle la 1re puissance de 17 ; on pourrait l'écrire ainsi : 17^1.

56. *Pour avoir le produit de deux ou de plusieurs puissances d'un même nombre, il suffit d'écrire ce nombre avec un exposant égal à la somme des exposants des facteurs.*

Ainsi $17^4 \times 17^3 = 17^7$. En effet $17^4 \times 17^3$ revient à $17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$ (n° 48).

On élève un produit à une puissance en élevant chacun de ses facteurs à cette puissance.

Soit, par exemple, $60 = 3 \times 4 \times 5$ à élever à la troisième puissance ; $60^3 = (3 \times 4 \times 5)^3 = 3 \times 4 \times 5 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3 \times 4 \times 5 = 3.3.3.4.4.4.5.5.5 = 3^3 \times 4^3 \times 5^3$.

Si les facteurs du produit ont déjà des exposants, il résulte des deux règles précédentes combinées qu'on élève ce produit à une puissance donnée en multipliant l'exposant de chaque facteur par l'exposant de la puissance.

Ainsi $(2^4)^3 = 2^4 \times 2^4 \times 2^4 = 2^{12}$, et $(2^4 \times 3^3 \times 5)^3 = 2^{12} \times 3^9 \times 5^3$.

57. *Pour avoir le quotient de deux puissances d'un même nombre, il suffit de donner à ce nombre pour exposant la différence des exposants des puissances données.*

Ex. $17^7 : 17^4 = 17^3$

$17^7 \times 12^4 \times 8^3 : 17^4 \times 12^3 \times 8 = 17^{7-4} 12^{4-3} 8^{3-1} = 17^3 \times 12 \times 8^2$.

CHAPITRE II.

DIVISIBILITÉ DES NOMBRES.

58. DÉFINITIONS. On appelle *multiple* d'un nombre tout produit de ce nombre par un nombre entier.

On appelle *facteur* ou *sous-multiple* d'un nombre tout nombre dont le premier est un multiple.

Ex. : 20 est un multiple de 5; car $20 = 5 \times 4$; réciproquement 5 est un facteur ou sous-multiple de 20.

Quand la division de deux nombres se fait sans reste, on dit :

1° Que le plus grand nombre est *divisible* par le plus petit;

2° Que le plus petit nombre est un *diviseur* du plus grand.

Ex. : 20 est divisible par 5, et 5 est un diviseur de 20.

Dire qu'un nombre est *divisible* par un autre ou qu'il est un multiple de cet autre, c'est évidemment la même chose, car les deux égalités $20 : 5 = 4$ et $20 = 5 \times 4$ sont des conséquences l'une de l'autre.

De même, les mots *facteur, sous-multiple, diviseur* ont des significations parfaitement équivalentes.

On emploie encore assez souvent le mot de *partie aliquote* dans le même sens que le mot *diviseur.*

On appelle *partie aliquote* d'un nombre donné tout nombre contenu un nombre entier de fois dans ce nombre donné. Ex. : 5 et 4 sont des parties aliquotes de 20.

On appelle *nombre premier* tout nombre qui n'est divisible que par lui-même ou l'unité. Ex. : 7.

Des nombres sont dits *premiers entre eux*, quand ils n'admettent d'autre diviseur commun que l'unité.

1er ex. : 8 et 5; 2e ex. : 7, 20, 33.

59. Remarque. Tout nombre premier qui n'est pas diviseur d'un autre nombre est premier avec lui. Ex. : 7, qui ne divise pas 24, est premier avec 24.

Les seuls diviseurs de 7 sont 7 et 1 ; 7 ne divisant pas 24, le seul diviseur commun à 7 et 24 est 1.

60. Théorème I. *Tout diviseur de plusieurs nombres est un diviseur de leur somme.* Autrement dit :

La somme de plusieurs multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre.

Ex. : les nombres 24, 30, 18, étant divisibles par 6, leur somme 72 est divisible par 6.

En effet,
$$24 = 6 + 6 + 6 + 6 \quad (4 \textit{ fois})$$
$$30 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 \quad (5 \textit{ fois})$$
$$18 = 6 + 6 + 6 \quad (3 \textit{ fois}).$$

La somme $24 + 30 + 18 = 72$ se composant de tous ces nombres, 6, réunis, est évidemment un multiple de 6.

$$72 = (4 + 5 + 3) \text{ fois } 6 = 12 \text{ fois } 6 = 6 \times 12.$$

61. Corollaire. *Tout diviseur d'un nombre divise les multiples de ce nombre.*

Ex. : 5 diviseur de 30, divise exactement 30×7.

En effet, 30×7 est la somme de sept nombres égaux à 30 ; 5, diviseur de chacun de ces nombres, est diviseur de leur somme.

62. Théorème II. *Tout diviseur de deux nombres divise leur différence.*

Ou bien, *la différence de deux multiples d'un même nombre est un multiple de ce nombre.*

Ex. : 6, diviseur de 30 et 18, divise leur différence $30 - 18 = 12$.

En effet,
$$30 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 \quad (5 \textit{ fois})$$
$$18 = 6 + 6 + 6 \quad (3 \textit{ fois}).$$

On obtient la différence $30 - 18 = 12$ en retranchant de la 1re somme tous les nombres 6 de la seconde ; il reste 2 fois 6 ; donc $30 - 18 = 2 \text{ fois } 6 = 6 \times 2$.

63. Corollaire I. *Un nombre étant la somme de deux autres,*

tout diviseur de la somme et de l'une des parties divise exactement l'autre partie.

Ex. : $30 = 18 + 12$. Le nombre 6 diviseur de 30 et 18 divise exactement 12; en effet 12 est la différence entre 30 et 18. C'est un troisième énoncé du théorème II.

64. Corollaire II. *Tout diviseur de deux nombres divise le reste de leur division.*

Ex. : $540 = 150 \times 3 + 90$. Le nombre 6, qui divise à la fois le dividende 540 et le diviseur 150 divise le reste 90 de leur division. En effet 6, diviseur de 150, divise 150×3, multiple de 150; 6 divisant une somme de deux nombres, 540, et l'un de ces nombres, 150×3, doit diviser l'autre nombre, 90; (63).

65. Théorème III. *Si un nombre donné se décompose en un multiple d'un certain diviseur, plus un autre nombre quelconque, la division de ce nombre donné et de sa seconde partie par ce diviseur donnent le même reste.*

Il peut arriver deux cas :

1° La seconde partie du nombre donné est un multiple du diviseur en question; alors le nombre donné admet lui-même ce diviseur (60), et les deux divisions susdites donnent le reste zéro. Ex. : $84 = 56 + 28$; diviseur 7.

2° La seconde partie n'est pas un multiple de ce diviseur. Ex. : $96 = 60 + 36$; 60 est un multiple de 10, et 36 ne l'est pas:

$$\begin{array}{r} 60 = 6 \text{ fois } 10 \\ 36 = 3 \text{ fois } 10 + 6 \\ \hline 96 = 9 \text{ fois } 10 + 6 \end{array}$$

La division de 96 et celle de 36 par 10 donnent le même reste 6.

66. On a souvent besoin de savoir si un nombre est divisible par un autre, et quand cela n'est pas, de connaître le reste de la division du plus grand par le plus petit. Le plus souvent, il n'existe pas de moyen plus simple de résoudre la question que de faire la division des deux nombres suivant la règle ordinaire. Cependant l'application des principes qui précèdent, et surtout du dernier, permettent, dans quelques cas particuliers que nous allons indiquer, d'arriver au résultat plus simplement qu'en divisant l'un par l'autre les deux nombres donnés.

DIVISIBILITÉ PAR 2, 5, 4, 25, 8, 125, ETC.

67. On a fait les remarques suivantes :

$10 = 2 \times 5$; $100 = 4 \times 25$; $1000 = 8 \times 125$; etc...

D'où ces conséquences :

1° Tout multiple de 10, c'est-à-dire, tout nombre terminé par un zéro au moins, est divisible par 2 ou par 5 ; (61).

2° Tout multiple de 100, c'est-à-dire tout nombre terminé par deux zéros au moins, est divisible par 4 ou 25.

3° Tout multiple de 1000, c'est-à-dire, tout nombre terminé par trois zéros au moins, est divisible par 8 ou 125.

68. Théorème. *Pour qu'un nombre soit divisible par 2 ou par 5, il faut et il suffit que le chiffre de ses unités simples soit zéro, ou divisible par 2 ou par 5.*

En effet,

Le reste de la division d'un nombre par 2 ou par 5 est le même que le reste de la division par 2 ou par 5 du chiffre de ses unités simples.

Ex. : 5467 ; on a $5467 = 5460 + 7 =$ un multiple de 2 ou 5, plus 7.

Donc, en vertu du théorème, n° 65, le reste de la division de 5467 par 2 ou par 5 est le même que celui de la division de 7 par 2 ou par 5.

Un nombre donné est appelé *pair* ou *impair*, suivant qu'il est ou qu'il n'est pas divisible par 2.

Ex. : 24 est un nombre pair, 25 est un nombre impair.

Remarque. Il n'y a évidemment que les nombres terminés par 0 ou par 5 qui soient divisibles par 5.

69. Théorème. *Pour qu'un nombre soit divisible par 4 ou par 25, il faut et il suffit qu'il soit terminé, à droite, par 2 zéros, ou par un nombre de deux chiffres divisible par 4 ou 25.*

En effet,

Le reste de la division d'un nombre par 4, ou par 25, est le même que le reste de la division par 4, ou par 25, du nombre formé par les deux derniers chiffres, à droite, de ce nombre proposé.

Ex. : 54267 ; on a $54267 = 54200 + 67 =$ un multiple de 4 ou 25, plus 67.

Donc, d'après le théorème, n° 65, la division de 67 par 4 ou par 25, doit donner le même reste que celle de 54367 par 4 ou par 25.

REMARQUE. Parmi les nombres de deux chiffres, il n'y a que 25, 50 et 75 qui soient des multiples de 25.

70. THÉORÈME. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 8 *ou* 125, *il faut et il suffit qu'il soit terminé par* 3 *zéros ou par un nombre de trois chiffres divisible par* 8 *ou* 125.

En effet,

Le reste de la division d'un nombre par 8 *ou* 125 *est le même que le reste de la division par* 8 *ou* 125 *du nombre que forment les* 3 *derniers chiffres à droite de ce nombre proposé.*

Ex. : 543672 = 543000 + 672 = un multiple de 8 ou de 125, plus 672, etc.

On pourrait continuer pour d'autres puissances de 2 ou de 5; mais cela serait peu utile.

DIVISIBILITÉ PAR 9 ET PAR 3.

71. THÉORÈME. *Pour trouver le reste de la division d'un nombre par* 9, *il suffit de faire la somme des valeurs absolues des chiffres de ce nombre, et de diviser cette somme par* 9; *le reste de cette division est le reste cherché.*

COROLLAIRE. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 9, *il faut et il suffit que la somme des valeurs absolues de ses chiffres soit divisible par* 9.

En effet,

1° *L'unité suivie d'un nombre quelconque de zéros exprime un multiple de* 9, *augmenté de* 1.

Soit pour exemple 10000. Posons la division de 10000 par 9.

```
10000 | 9
10    |----
 10   | 1111
  10
   1
```

En 10 il y a une fois 9 et le reste 1; on abaisse un zéro; en 10, il y a une fois 9 et un reste 1; cette opération se répète autant de fois qu'il y a de zéros à la droite de l'unité; chaque reste étant 1,

quel que soit le nombre des zéros, le reste final est égal à 1 : par suite, le dividende, puissance quelconque de 10, égal au produit de 9 par le quotient 111... plus le reste 1, est toujours un multiple de 9, plus un.

2° COROLLAIRE. *Un chiffre significatif quelconque suivi d'un ou de plusieurs zéros est un multiple de 9 augmenté de la valeur absolue de ce chiffre.*

Ex. : $6000 = 1000 \times 6 = (9 \times m + 1) \times 6 = 9 \times m \times 6 + 6$, ce qui est bien un multiple de 9, plus 6.

Il résulte de là que *la valeur relative de chaque chiffre significatif d'un nombre est un multiple de* 9, *plus la valeur absolue de ce chiffre ;* donc le nombre lui-même, qui est la somme des valeurs relatives de ses chiffres, est égal à une somme de multiples de 9, ce qui fait un multiple de 9, plus la somme des valeurs absolues de ses chiffres.

C'est ce qu'on explique quelquefois par le tableau suivant :

$$\begin{array}{rl}
35867 = & 7 + 60 + 800 + 5000 + 30000. \\
7 = & \qquad\qquad 7 \\
60 = & \text{un m. de } 9 + 6 \\
800 = & \text{un m. de } 9 + 8 \\
5000 = & \text{un m. de } 9 + 5 \\
30000 = & \text{un m. de } 9 + 3 \\
\hline
35867 = & \text{un m. de } 9 + (7 + 6 + 8 + 5 + 3).
\end{array}$$

Tout nombre étant égal à un multiple de 9, plus la somme de ses chiffres significatifs, *on obtient le reste de la division d'un nombre par* 9 *en divisant la somme de ses chiffres par* 9 (n° 65, Th. III). Le nombre est ou n'est pas divisible par 9, suivant que cette somme est ou n'est pas divisible par 9.

72. *Un nombre est divisible par* 3 *quand la somme des valeurs absolues de ses chiffres est divisible par* 3. En général, *le reste de la division d'un nombre par* 3 *est le même que le reste de la division de la somme de ses chiffres par* 3.

Tout cela est une conséquence de la décomposition précédente. Un nombre étant égal à un multiple de 9, plus la somme de ses chiffres, est égal à un multiple de 3, plus la somme de ses chiffres. Car tout multiple de 9 est divisible par 3, facteur de 9.

73. *Preuve par 9 de la multiplication ou de la division.*

Expliquons d'abord, sur un exemple, la preuve par 9 de la multiplication.

7 | 8	538	$538 = 9 \times m + r$; $(r = 7)$
5 | 8	473	$473 = 9 \times m' + r'$; $(r' = 5)$
	1614	$\overline{538} \times \overline{473}$, ou
	3766	
	2152	$254474 = (9 \times m + r) \times 9 \times m' + 9 \times m \times r' + r \times r'$;
	254474	ou $254474 =$ un multiple de $9 + r \times r'$;

Car ce qui précède $r \times r'$ est la somme de deux multiples de 9. Il résulte de ce tableau que le reste de la division par 9 du produit 254474 est le même que celui de la division par 9 du produit $r \times r'$; r étant le reste de la division par 9 du multiplicande; r', le reste *id* du multiplicateur. On déduit de là cette règle :

RÈGLE. *Pour faire la preuve par* 9 *d'une multiplication, cherchez* : 1° *le reste* r *de la division par* 9 *du multiplicande* (71) ; 2° *le reste* r' *de la division du multiplicateur ;* 3° *multipliez* r *par* r', *puis cherchez le reste de la division par* 9 *du produit des restes* r × r'; *soit* r'' *ce* 3ᵉ *reste ;* 4° *enfin, calculez le reste de la division par* 9, *du produit obtenu ; vous devez trouver un reste égal à* r''.

La preuve par 9 de la division se fait comme il suit ; on retranche du dividende le reste final de la division ; le résultat de cette soustraction doit être le produit exact du diviseur par le quotient. Si donc on applique au diviseur (*multiplicande*), au quotient (*multiplicateur*), et au reste de la soustraction précédente (*produit*), la règle ci-dessus, on doit parvenir à la vérification indiquée par cette règle.

Quand on fait la preuve par 9, il peut arriver que, dans le produit, on se trompe *en plus* sur certains chiffres d'une ou de plusieurs unités, et d'autant d'unités, *en moins*, sur d'autres chiffres ; la somme des chiffres restant la même, la susdite preuve ne fait pas découvrir les erreurs (*).

(*) La divisibilité par 11 n'étant pas le programme, nous la mettons à la fin de la divisibilité ; nous l'y exposons exactement comme nous l'aurions fait ici, pour ceux qui voudront l'étudier. V. page 73.

THÉORIE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

74. Nous traiterons d'abord la question pour deux nombres seulement.

Par abréviation, nous désignerons souvent le plus grand commun diviseur par ces *initiales*, le p. g. c. d.

Soit proposé de trouver le p. g. c. d. entre 348 et 96.

Ce p. g. c. d. devant diviser 96 ne saurait être plus grand que 96; si donc 96 divisait 348, comme il se divise lui-même, il serait le p. g. c. d. cherché. Essayons donc la division de 348 par 96.

$$\begin{array}{r|l} 348 & 96 \\ \cline{2-2} 60 & 3 \end{array}$$

On trouve un reste 60; 96 n'est donc pas le p. g. c. d. cherché. Néanmoins, la division que nous venons de faire n'aura pas été inutile, car le p. g. c. d. entre 348 et 96 est le même que celui qui existe entre 96 et 60; c'est ce que nous allons prouver.

Il résulte de la division précédente que $348 = 96 \times 3 + 60$.

1° Tout diviseur commun à 348 et 96 est diviseur commun à 96 et 60. En effet, ce diviseur de 348 et 96 divise 96×3, multiple de 96; divisant une somme 348 et l'une de ses parties 96×3, il divise l'autre partie 60; il est donc diviseur commun à 96 et 60. 2° Tout diviseur commun à 96 et 60 est un diviseur commun à 348 et 96. En effet, ce diviseur de 96 et 60 divise 96×3; divisant 96×3 et 60, il divise leur somme 348; il est donc diviseur commun à 348 et 96. Les diviseurs communs à 348 et 96 sont donc les mêmes, *un à un*, que les diviseurs communs à 96 et 60; le plus grand parmi les premiers est donc le même que le plus grand parmi les derniers. Autrement dit, le p. g. c. d. entre 348 et 96 est le même que celui qui existe entre 96 et 60.

Cette démonstration est générale, et nous pouvons poser en principe que :

Le p. g. c. d. entre deux nombres quelconques est le même que celui qui existe entre le plus petit de ces deux nombres et le reste de leur division.

Revenons à 348 et 96; pour trouver le p. g. c. d. de ces deux

nombres, il nous suffira donc de trouver celui qui existe entre 96 et 60. Pour voir si ce p. g. c. d. n'est pas 60 lui-même, nous essayerons la division de 96 par 60.

96	60
36	1

60 n'est pas le p. g. c. d.; mais en vertu du principe que nous venons d'établir, le p. g. c. d. entre 96 et 60 est le même que celui qui existe entre 60 et 36. Nous sommes donc conduits à diviser 60 par 36; cette division donne un reste 24. Raisonnant de même, nous diviserons 36 par 24; cette division donne un reste 12. Enfin, nous diviserons 24 par 12; la division se fait sans reste. Nous concluons de là que 12 est le p. g. c. d. entre 24 et 12, par suite entre 36 et 24, puis entre 60 et 36, puis entre 96 et 60, et enfin entre les deux nombres donnés, 348 et 96.

Voici le tableau des opérations qui ont été faites avec la disposition qu'on leur donne ordinairement.

	3	1	1	1	2
348	96	60	36	24	12
60	36	24	12	0	

Ce raisonnement conduit évidemment à la règle suivante.

75. RÈGLE. *Pour trouver le p. g. c. d. entre les deux nombres, divisez le plus grand nombre par le plus petit; si la division se fait sans reste, le plus petit nombre est le p. g. c. d.*

Dans le cas contraire, divisez le plus petit nombre donné par le reste; si cette division ne donne pas de reste, le premier reste est le p. g. c. d. de deux nombres donnés; si on a encore un reste, on divise le premier reste par le second; ainsi de suite, on divise chaque diviseur par le reste correspondant, jusqu'à ce qu'on arrive à une division qui se fasse exactement. Alors, le dernier diviseur employé est le p. g. c. d. cherché.

Lorsqu'on arrive au reste 1, on conclut que les nombres proposé sont premiers entre eux.

Il résulte de notre raisonnement que le p. g. c. d. entre les nombres proposés est le même que celui qui existe entre deux

restes consécutifs quelconques, ou bien entre le dividende et le diviseur de chaque division.

Les restes successifs allant constamment en diminuant, il est évident que la recherche du p. g. c. d. de deux nombres doit toujours se terminer après un nombre limité de divisions.

On peut quelquefois abréger le calcul.

Rappelons-nous que tout nombre premier qui ne divise pas un autre nombre est premier avec lui.

Si donc on arrive à diviser par un nombre premier absolu, on n'a plus qu'une division à faire.

En effet, ou ce nombre premier divise son dividende, et alors il est le p. g. c. d. cherché; ou bien ne le divisant pas, il est premier avec lui; ces deux nombres ayant l'unité pour p. g. c. d., il en est de même des deux nombres proposés.

76. THÉORÈME I. *Tout nombre qui en divise deux autres divise leur p. g. c. d.*

Ex. : Le nombre 4 qui divise 348 et 96 divise leur p. g. c. d. On se fonde sur ce théorème démontré (64); tout nombre qui en divise deux autres divise le reste de leur division.

Écrivons le tableau de la recherche du p. g. c. d. de 348 et 96.

	3	1	1	1	2
348	96	60	36	24	12
60	36	24	12	0	

4 divisant 348 et 96, divise le reste 60 de leur division (64); 4 divisant 96 et 60, divise le reste 36 de leur division; et ainsi de suite, 4 divise tous les restes successifs de l'opération; donc il divise le p. g. c. d., 12, qui est un de ces restes.

La réciproque est évidente: *Tout nombre qui divise le p. g. c. d. de deux nombres divise ces nombres.* Il suffit d'observer que les nombres sont les multiples de leur p. g. c. d.

77. Proposons-nous maintenant de *trouver le p. g. c. d. de plus de deux nombres*, par exemple, des nombres 540, 348, 96 et 132.

On peut ramener cette recherche à celle du p. g. c. d. entre deux nombres à l'aide de la règle suivante. *On cherche le p. g. c. d. entre deux des nombres proposés*, 540 et 348, *par exemple*,

soit d *ce p. g. c. d. Puis, le p. g. c. d. entre* d *et un des nombres restants*, 96, *par exemple ; soit* d' *le nombre obtenu, on cherche enfin le p. g. c. d. entre* d' *et le quatrième nombre* 132 : *soit* d'' *ce p. g. c. d.*; d'' *est le p. g. c. d. des quatre nombres.*

Pour le prouver, observons d'abord que *d''* est diviseur commun aux quatre nombres. En effet, *d''* divise, d'après sa définition, les nombres *d'* et 132 ; divisant *d'*, il divise *d* et 96, multiples de *d'*; divisant *d*, il divise 540 et 348, multiples de *d*. ; *d''* est donc bien un diviseur commun aux quatre nombres. Aucun diviseur commun à ces quatre nombres ne saurait être plus grand que *d''*; soit, en effet, *a*, l'un quelconque de ces diviseurs; *a* divisant 540 et 348, divise leur p. g. c. d., *d*; *a* divisant *d* et 96, divise leur p. g. c. d. *d'*; *a* divisant *d'* et 132, divise *d''*; ce diviseur *a* n'est donc pas plus grand que *d''*; *d''* est donc le p. g. c. d. des quatre nombres, puisque ceux-ci n'ont aucun diviseur commun plus grand que lui.

78. Le nombre *d''* étant reconnu pour le p. g. c. d. des quatre nombres, il résulte de la démonstration précédente que :

Tout diviseur a *commun à plusieurs nombres divise leur p. g. c. d.*

Réciproquement, *tout nombre qui divise le p. g. c. d. de plusieurs nombres divise tous ces nombres*; car ceux-ci ne sont que des multiples de leur p. g. c. d.

79. Théorème. *Si on multiplie plusieurs nombres donnés par un même nombre, le p. g. c. d. des produits obtenus est égal au p. g. c. d. des nombres primitivement donnés, multiplié par le multiplicateur commun.*

1° Je vais d'abord démontrer ce théorème pour deux nombres, par exemple, 348 et 96.

Je suppose qu'on les multiplie par un même nombre 10.

Écrivons le tableau de la recherche du p. g. c. d. de 348 et 96.

	3	1	1	1	2
348	96	60	36	24	12
60	36	24	12	0	

Cherchons maintenant le p. g. c. d. entre 348 × 10 et 96 × 10.

Pour cela, il faut d'abord diviser 348 × 10 par 96 × 10 ; en comparant cette division à celle de 348 par 96, nous pouvons dire d'avance que le quotient de la division sera 3, et le reste 60 × 10 (53). Il faut, pour continuer, diviser 96 × 10 par 60 × 10 ; comparant cette division à celle de 96 par 60, on conclut que le quotient de la division sera 1, et le reste 36 × 10 ; on sera conduit à diviser 60 × 10 par 36 × 10 ; et ainsi de suite, les restes successifs sont multipliés par 10 ; enfin, à la dernière division : celle de 24 par 12, qui se fait sans reste, correspondra la division des mêmes nombres multipliés respectivement par 10 ; 24 × 10 et 12 × 10, qui se fera aussi sans reste (52). D'où on conclut que le plus grand commun diviseur de 348 × 10 et 96 × 10 est 12 × 10. Ce qui démontre le théorème.

2° Une fois ce théorème démontré pour deux nombres ; on le démontre facilement pour autant de nombres que l'on veut.

Ex. : 540, 348, 96, 132.

Supposons qu'on multiplie tous ces nombres par 10 ; soit d le p. g. c. d. entre 540 et 348 ; d' entre d et 96 ; et d'' entre d' et 132. On sait que d'' est le p. g. c. d. des quatre nombres.

Le plus g. c. d. entre 540 et 348 étant d, celui de 540 × 10 et 348 × 10 sera d × 10, (1°) ; le p. g. c. d. entre d et 96 étant d', le p. g. c. d. entre d × 10 et 96 × 10 sera d' × 10 ; le p. g. c. d. entre d' et 132 étant d'', le p. g. c. d. entre d' × 10 et 132 × 10 est d'' × 10. Mais, ce nombre d'' × 10 est le p. g. c. d. des quatre produits 540 × 10, 348 × 10, 96 × 10, 132 × 10. Le théorème est donc démontré.

80. THÉORÈME III. *Si on divise plusieurs nombres donnés par un même nombre, le p. g. c. d. des quotients est égal à celui des nombres donnés divisé par ce même nombre.*

On démontre ce théorème absolument de la même manière que le précédent, en s'appuyant sur ce principe : quand on divise les deux termes d'une division par un même nombre, le quotient entier ne change pas, mais le reste est divisé par ce nombre (53).

On peut aussi regarder ce théorème III comme une conséquence du théorème II.

Ex. : On divise par 10 chacun des quatre nombres 5400, 3480, 960, 1320 ; le plus g. c. d. des quotients 540, 348, 96, 132 est égal au p. g. c. d., D, des nombres primitifs 5400, 3480, etc. ; divisé par 10.

En effet, $5400 = 540 \times 10$, $3480 = 348 \times 10$, $960 = 96 \times 10$, $1320 = 132 \times 10$; donc, (théor. II), le p. g. c. d., D, de 5400, 3480, 960, 1320, est égal au plus g. c. d., d, de 540, 348, 96, 132, multiplié par 10 ; de $D = d \times 10$, on déduit $d = \frac{D}{10}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Application. Si plusieurs nombres, 5400, 840, 1080, dont on cherche le p. g. c. d., ont un diviseur commun, facile à découvrir, comme dans notre exemple le diviseur 20, on peut les diviser d'abord par ce diviseur 20, et chercher ensuite le p. g. c. d. des quotients 270, 42, 54. Ce p. g. c. d. étant trouvé, il suffira évidemment de le multiplier par le facteur 20 mis à part.

81. Théorème IV. *Si on divise plusieurs nombres* A, B, C, E *par leur p. g. c. d., les quotients* A′, B′, C′, E′ *sont premiers entre eux.*

En effet, puisqu'on a obtenu A′, B′, C′, E′ en divisant respectivement A, B, C, E par le même nombre D, il résulte du théorème précédent que le p. g. c. d. de A′, B′, C′, E′ est égal au p. g. c. d., D, de A, B, C, E, divisé par D, c'est-à-dire, égal à 1. Donc, A′, B′, C′, E′ sont premiers entre eux.

82. Réciproquement, *si en divisant des nombres* A, B, C, E *par un même diviseur* D, *on a trouvé des quotients* A′, B′, C′, E′, *premiers entre eux, on peut dire que le diviseur commun employé était le p. g. c. d. des quatre nombres* A, B, C, E.

En effet, d'après les hypothèses, $A = A' \times D$, $B = B' \times D$, $C = C' \times D$, $E = E' \times D$. Mais le p. g. c. d. de A′, B′, C′, E′ est 1; donc celui des produits, $A' \times D$ ou A, $B' \times D$ ou B, etc., doit être $1 \times D$ ou D.

NOMBRES PREMIERS. — NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX.

Rappelons les définitions :

Un nombre est dit *premier* quand il n'a d'autre diviseur que lui-même et l'unité. Ex. : 5, 7.

Deux nombres sont dits *premiers entre eux* quand ils n'ont d'autre diviseur commun que l'unité. Ex. : 8 et 15.

Tout nombre premier qui ne divise pas un nombre est premier avec lui. Ex. : 7 est premier avec 24; (V. le nº 59).

On appelle *facteur premier* d'un nombre tout nombre premier dont il est le multiple.

83. Remarque. *Tout nombre qui n'est pas premier est un produit de facteurs premiers.*

En effet, ce nombre admet un diviseur et peut dès lors être décomposé en un produit de deux facteurs, qui sont le diviseur en question et le quotient qu'il fournit. Si ces facteurs ne sont pas premiers, chacun pourra être remplacé par deux facteurs moindres que lui; et ainsi de suite, tant qu'il y aura dans la liste des facteurs obtenus un seul facteur non premier, on pourra le remplacer par un produit de deux facteurs moindres que lui. Mais une pareille décomposition doit avoir un terme; car chaque facteur trouvé est au moins égal à 2, et le nombre proposé ne peut être le produit que d'un nombre limité de facteurs, 2, ou autres. Or quand la décomposition s'arrêtera, il n'y aura évidemment que des facteurs premiers dans le dernier produit égal au nombre proposé.

Ex. : $840 = 4 \times 21 = 10 \times 4 \times 3 \times 7 = 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7.$

84. *Un nombre est donc premier quand il n'admet pour diviseur aucun des nombres premiers moindres que lui.*

85. Nous allons indiquer la marche à suivre pour former une table de nombres premiers aussi étendue que l'on voudra; mais auparavant nous observerons qu'une pareille table ne saurait renfermer tous les nombres premiers; car, *la suite des nombres premiers est illimitée.*

Pour le démontrer, supposons que cette suite s'arrête à un nombre N, qui serait le plus grand de tous les nombres premiers. Imaginons que l'on forme le produit de tous les nombres premiers sans exception, depuis 2 inclusivement jusqu'à N; à ce produit $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots N$, ajoutons l'unité. Soit $P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times N + 1$. Quel que soit P, il existe nécessairement un nombre premier divisant ce nombre P (83) (*). Ce diviseur premier ne peut

(*) Les produits $2+1$; $2 \times 3 + 1$, $2 \times 3 \times 5 + 1$,... ne sont pas tous des nombres premiers; on l'a cru d'abord en voyant que les premiers formés 3, 7, 31, étaient des nombres premiers; mais, en continuant, on voit, que $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031$ est égal à 59×509.

être aucun des nombres 2, 3, 5, etc., jusqu'à N inclusivement. En effet, si un de ces nombres premiers, 5, par exemple, divisait P, comme il divise aussi le produit effectué $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times N$, il devrait diviser 1, ce qui est absurde. Ce diviseur premier de P, qui *existe* nécessairement, est donc un nombre premier plus grand que N; la suite des nombres premiers ne s'arrête donc pas à N.

Il résulte de là qu'en se proposant de former une table de nombres premiers, on doit s'assigner une limite.

80. FORMATION D'UNE TABLE DE NOMBRES PREMIERS. Proposons-nous, par exemple, de former la table des nombres premiers compris dans les mille premiers nombres.

Nous écrirons ces mille premiers nombres par ordre de grandeurs :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,..... 1000.

Nombres premiers : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc. (V. la table ci-après.)

2 est évidemment un nombre premier. Parcourons notre liste, en lisant les nombres deux à deux, à partir de 2 *exclusivement*, et effaçons chaque deuxième nombre. Nous effaçons ainsi les multiples de 2, autrement dits nombres pairs. En effet, deux rangs plus loin que 2, nous trouvons 2 plus 2, ou deux fois 2 ; deux rangs plus loin encore nous aurons deux fois 2, plus 2, ou trois fois 2; et ainsi de suite. 3 n'ayant pas été effacé est un nombre premier, puisqu'il n'est divisible par aucun nombre premier moindre que lui; parcourons de nouveau la liste, à partir de 3 *exclusivement*, en comptant les nombres trois par trois, et effaçons chaque troisième nombre qui n'aurait pas déjà été effacé comme multiple de 2; de cette manière nous aurons effacé tous les multiples de 3 ; en effet, trois rangs après 3, on trouve $3 + 3$ ou deux fois 3 ; trois rangs plus loin encore on a $(3 + 3) + 3$, ou trois fois 3, et ainsi de suite.

Tous les multiples de 3 ainsi effacés, nous trouvons que le premier nombre non effacé après 3 est 5. Le nombre 5 n'étant divisible par aucun des nombres premiers 2 ou 3, moindres que lui, est lui-même un nombre premier. Nous aurons effacé tous les multiples de 5, quand parcourant la liste à partir de 5, exclusive-

ment, et comptant les nombres 5 à 5, nous aurons effacé chaque cinquième nombre qui ne serait pas déjà effacé, comme multiple de 2 ou de 3 Cela fait, on verra que le premier nombre non effacé après 5 est 7; 7 est un nombre premier absolu pour la raison déjà indiquée. On effacera chaque septième nombre, à partir de 7 exclusivement, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste plus de nombres premiers.

On abrége ce travail par la remarque suivante : quand on commence à effacer les multiples d'un certain nombre premier, de 7, par exemple; on trouve que le premier de ces multiples non effacés antérieurement est 7×7; ou le carré de 7. C'est ce que l'on doit savoir d'avance; en effet, les nombres inférieurs à 7 étant, ou des nombres premiers déjà considérés, ou des multiples de ces nombres premiers; les produits de 7 par ces nombres inférieurs ont dû nécessairement être effacés, comme multiples des nombres premiers précédents. Arrivé à 7; on cherchera donc immédiatement 49, qu'on effacera, et c'est à partir de 49, exclusivement qu'on effacera, de 7 nombres en 7 nombres.

Cette remarque étant applicable à chaque nombre premier, on en déduit cette *règle :* chaque fois qu'on arrive à un nombre premier n, on calcule le produit $n \times n$ ou n^2; on cherche immédiatement ce carré dans la table : on l'efface, et c'est à partir de ce carré, exclusivement, que l'on efface ensuite chaque $n^{ième}$ nombre.

D'après cette règle, l'opération est terminée quand on arrive à un nombre premier p, dont le carré p^2 dépasse la limite de la table, qui est, dans notre exemple, le nombre 1000. En effet, il n'y a plus à effacer aucun multiple de p; car il faudrait commencer à p^2; on en dira autant, *à fortiori*, des multiples des nombres premiers plus grands que p; on a d'ailleurs effacé les multiples des nombres premiers précédents. Il ne reste donc plus dans la table que des nombres premiers absolus, aucun de ces nombres restant n'ayant été trouvé multiple d'un nombre premier moindre que lui.

REMARQUE. Un nombre *non premier* est au moins égal au carré de son plus petit facteur premier. En effet, on l'efface comme multiple de ce plus petit facteur.

Table des nombres premiers inférieurs à 1000.

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

THÉORÈMES SUR LES DIVISEURS OU FACTEURS PREMIERS.

87. THÉORÈME. *Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs, et est premier avec l'un de ces facteurs, divise l'autre.*

Ex. : $840 = 42 \times 20$; le nombre 21 qui divise 840, et est premier avec 20, doit diviser 42.

En effet, 20 et 21 étant premiers entre eux, leur p. g. c. d. est 1. Si on considère les produits de ces deux nombres par 42, c'est-à-dire, 20×42 et 21×42, on trouvera que le plus grand commun diviseur de ces produits est 1×42 ou 42 (79). Or, 21 divise par hypothèse 20×42 ou 840 ; il divise 21×42 son propre multiple. 21 divisant 20×42 et 21×42, divise le p. c. g. d. 42, de ces produits (76). C'est ce qu'il fallait prouver.

88. THÉORÈME. *Tout nombre premier qui divise un produit doit diviser au moins un des facteurs de ce produit.*

Je vais d'abord démontrer ce principe pour un produit de deux facteurs, $A \times B$. Soit P un nombre premier absolu qui divise ce produit : ou bien P divise A, et la proposition est démontrée ; ou bien P est premier avec A, et alors puisqu'il divise le produit $A \times B$, il doit diviser l'autre facteur B (87) ; P divise donc nécessairement un des deux facteurs.

Considérons maintenant un produit de plus de deux facteurs, de quatre facteurs par exemple ; un nombre premier absolu, P, qui divise le produit $A \times B \times C \times E$ doit diviser l'un des facteurs. En effet, A B. C. E peut être regardé comme un produit de deux facteurs, par exemple, comme égal au produit effectué $(A \times B \times C)$ multiplié par E ; P divisant ce produit doit diviser l'un des facteurs, E, ou $(A \times B \times C)$. S'il divise E, notre proposition est démontrée ; s'il ne divise pas E, il devra diviser $A \times B \times C$, que nous pouvons regarder comme un produit de deux facteurs $(A \times B)$ et C. Nous dirons encore : ou P divise C, et le théorème est démontré ; ou bien il divise l'autre facteur $A \times B$, et alors il devra diviser l'un des facteurs, A ou B, de ce produit De toutes manières P doit diviser un des facteurs du produit $A \times B \times C \times E$.

89. COROLLAIRE. *Tout nombre* PREMIER ABSOLU *qui divise une puissance d'un nombre doit diviser ce nombre.* Ex. : un nombre premier 3 qui divise 12^4 doit diviser 12.

En effet, $12^4 = 12 \times 12 \times 12 \times 12$. Le nombre premier 3 divisant ce produit, doit diviser l'un des facteurs 12.

90. COROLLAIRE. *Lorsque deux nombres sont premiers entre eux, deux puissances quelconques de ces nombres sont premières entre elles.*

Ex. : 8 et 15 sont premiers entre eux ; 8^2 et 15^3 sont des nombres premiers entre eux.

Supposons, en effet, que 8^2 et 15^3 aient un commun diviseur D ; soit f un facteur premier de D ; (si D était un nombre premier absolu, f serait D lui-même) ; f, divisant D, diviserait 8^2 et 15^3, multiples de D ; f, nombre premier, divisant 8^2, diviserait 8 ; f divisant 15^3 diviserait 15. Donc 8 et 15 auraient un commun diviseur f, ce qui serait contre l'hypothèse. Il est donc impossible que 8^2 et 15^3 aient un commun diviseur ; ces nombres sont premiers entre eux.

91. THÉORÈME. *Lorsqu'un nombre est divisible par plusieurs autres premiers, 2 à 2, il est divisible par leur produit.*

Par exemple, 5460 divisible par chacun des nombres 3, 4, et 35, premiers entre eux, deux à deux, est divisible par leur produit $3 \times 4 \times 35 = 420$.

D'abord, 5460 est le produit de 3 par un nombre entier q; $5460 = 3 \times q$; 4 qui divise 5460, divise le produit égal $3 \times q$; mais 4 est premier avec 3, donc il doit diviser q; nous aurons $q = 4 \times q'$, (q' étant un nombre entier); par suite $5460 = 3 \times 4 \times q'$. Le nombre 35 qui divise 5460 ou $3 \times q$, et est premier avec 3, doit diviser q; mais $q = 4 \times q'$; 35 divisant $4 \times q'$, et étant premier avec 4, doit diviser q'; donc $q' = 35 \times q''$, et $5460 = 3 \times 4 \times 35 \times q''$, ou $5460 = 420 \times q''$. Donc 5460 est divisible par 420.

92. Remarques. Si un nombre A est divisible par n nombres premiers 2 à 2, il est divisible par les produits de ces n nombres, multipliés 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc......, $n-1$ à $n-1$.

Corollaire. *Le plus petit nombre divisible par plusieurs nombres, premiers 2 à 2, est le produit même de ces nombres.*

93. En combinant, d'après le principe précédent, les caractères de divisibilité relatifs à 2, 4, 8, 3, 5, 9, on arrivera à des conséquences telles que les suivantes :

Lorsqu'un nombre est divisible par 2 et par 3, il est divisible par 2×3 ou 6; si un nombre est divisible à la fois par 2 et par 9, il est divisible par 2×9, ou 18. Tout nombre reconnu divisible par 3 et par 5 est divisible par 15; tout nombre divisible par 5 et par 9 est divisible par 9×5, ou 45, etc...

Ces principes peuvent ainsi s'énoncer.

Lorsque la somme des valeurs absolues des chiffres d'un nombre pair est divisible par 3 ou par 9, le nombre lui-même est divisible par 6 ou par 18. Lorsque la somme des valeurs absolues des chiffres d'un nombre terminé par 0 ou 5 est divisible par 3 ou par 9, le nombre est divisible par 15 ou 45.

DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN SES FACTEURS PREMIERS.

Nous pouvons maintenant nous occuper de la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers.

94. Théorème. *Un nombre donné N n'est décomposable qu'en un seul système de facteurs premiers.*

En effet, admettons que deux produits de facteurs premiers re-

présentent tous deux la valeur du même nombre N ; ces deux produits sont égaux ; cela étant, nous allons montrer d'abord que tout facteur premier de l'un de ces produits est un facteur de l'autre ; supposons, en effet, que 5 soit un facteur du premier produit ; 5, divisant le premier produit, divise le second produit égal au premier ; divisant ce second produit, il doit diviser au moins l'un de ses facteurs ; mais chacun des facteurs du second produit est un nombre premier absolu qui n'est divisible que par lui-même ; celui de ces facteurs qui est divisible par 5 n'est donc autre que 5.

Nous allons faire voir en second lieu que tout facteur premier qui se trouve répété plusieurs fois dans l'un des deux produits égaux à N, se trouve répété le même nombre de fois dans le second produit.

En effet, admettons que le premier produit admette deux facteurs 5, et le second trois. Si nous supprimons deux facteurs 5 dans chaque produit, les deux nouveaux produits de facteurs premiers devront être égaux entre eux. Mais cela ne serait pas dans notre hypothèse ; car le second de ces nouveaux produits contiendrait un facteur 5 qui ne se trouve pas dans le premier. On ne peut donc supposer que le facteur 5 se trouve répété plus de fois dans l'un des produits égaux à N que dans l'autre. On conclut de là que chaque facteur premier qui se trouve dans l'un de ces produits, une, deux, trois... fois, se trouve aussi dans l'autre le même nombre de fois ; ces deux produits sont donc identiques.

Ainsi donc un nombre n'est décomposable qu'en un seul système de facteurs premiers.

Remarque. Si un facteur premier se trouve répété plusieurs fois dans la décomposition d'un nombre N, on ne l'écrit qu'une fois en l'affectant d'un exposant marquant le nombre de fois qu'il doit être employé comme facteur dans le nombre.

$$\text{Ex. ; } 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5.$$

95. Il résulte de la proposition précédente que, pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers, on peut suivre la marche qui paraît la plus commode, sûr que l'on est d'arriver, de toutes les manières, au même résultat. Nous allons exposer la méthode ordinairement suivie.

Soit proposé de décomposer 76440 en ses facteurs premiers.

Voici le tableau du calcul ; nous l'expliquerons ensuite :

76440	2	$76440 = 2 \times 38220$
38220	2	$38220 = 2 \times 19110$
19110	2	$19110 = 2 \times 9555$
9555	3	$9555 = 3 \times 3185$
3185	5	$3185 = 5 \times 637$
637	7	$637 = 7 \times 91$
91	7	$91 = 7 \times 13$
13	13	$13 = 13 \times 1$
1	1	$76440 = 2.2.2.3.5.7.7.13 = 2^3.3.5.7^2.13.$

On voit d'abord, par l'inspection du dernier chiffre à droite, si le nombre proposé est pair ou impair ; le nôtre est pair. On le divise alors par 2, en posant la division comme à l'ordinaire ; mais on écrit le quotient sous le dividende, comme il est indiqué ; ce quotient est ici 38220. On remarque alors que $76440 = 2 \times 38220$: par suite les facteurs premiers de 76440 sont 2, et les facteurs premiers de 38220. Nous avons donc à chercher les facteurs premiers de 38220 ; ce nombre est divisible par 2 ; en faisant la division comme il est indiqué, on trouve le quotient 19110. Par suite $38220 = 2 \times 19110$, et $76440 = 2 \times 2 \times 19110$. Nous avons donc encore à trouver les facteurs premiers de 19110. Ce nombre est divisible par 2, et le quotient est 9555. Ce dernier nombre n'étant plus divisible par 2, on cherche s'il l'est par 3 d'après le caractère connu ; c'est ce qui arrive ; on trouve ainsi que $9555 = 3 \times 3185$. Le nombre 3185 n'est plus divisible par 3, mais il l'est par 5 ; on le divise par 5, en écrivant toujours le diviseur 5 à la droite du nombre 3185, et le quotient 637 au-dessous, comme il est indiqué. Il nous reste à chercher les facteurs de 637, qui n'est plus divisible par 5. On essaye la division par 7 ; cette division réussit et donne le quotient 91. 91 est encore divisible par 7 ; le quotient est 13, que l'on reconnaît facilement être un nombre premier.

Ayant écrit les égalités ci-dessus, conséquences des divisions effectuées, on arrivera facilement à l'égalité dernière, en multipliant toutes les précédentes, membres à membres, et supprimant d'avance les facteurs qui seront évidemment communs aux deux produits obtenus.

Cette égalité prouve que 76440 est le produit des facteurs premiers écrits en colonne verticale, lesquels employés comme diviseurs ont donné successivement les quotients exacts écrits à gauche. Ce qui précède apprend suffisamment ce qu'il y a à faire pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers. Cependant nous allons le résumer dans la règle suivante :

96. Règle. *Pour décomposer un nombre en facteurs premiers, on essaye successivement la division de ce nombre par chacun des nombres premiers* 2, 3, 5....., *essayés par ordre de grandeurs croissantes, jusqu'à ce qu'une division essayée donne le reste zéro.*

Si aucune division n'ayant donné le reste zéro, on arrive à en faire une dans laquelle le quotient est moindre que le diviseur, on en conclut que le nombre donné N *est premier. Si, au contraire, la division de* N *par un nombre premier* f *donne le reste zéro, on inscrit* f *comme facteur premier de* N; *puis on divise le quotient obtenu par* f; *si cette division donne le reste zéro, on divise le quotient par* f, *et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un quotient* N' *qui ne soit plus divisible par* f. *On verra alors que* N *est égal à* N' *multiplié par une puissance de* f, *dont l'exposant est le nombre de fois que la division par* f *a donné le reste zéro. On applique ensuite à* N' *exactement la même méthode qu'à* N; *seulement on n'essaye comme diviseurs que les nombres premiers supérieurs à* f. *Si un de ces nombres premiers* f' *divise exactement* N', *on divise le quotient par* f', *et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un quotient* N'' *qui ne soit pas divisible par* f'; *on applique la même méthode à* N'' *en prenant les nombres premiers plus grands que* f', *et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un quotient reconnu premier.*

Nous avons dit qu'un nombre N est premier quand aucune division précédente n'ayant réussi, on arrive à en faire une dans laquelle le quotient est moindre que le diviseur.

En effet, une fois qu'on est arrivé à une division dans laquelle le quotient est plus faible que le diviseur, il est évident que, si l'on continuait les essais, dans chaque division suivante, le quotient serait, *à fortiori*, plus petit que le diviseur. Aucune de ces divisions ne saurait réussir; en effet, supposons que l'une d'elles donne, *sans reste*, $N = a \times q$, q étant moindre que a, chaque facteur premier de q devrait diviser N; serait donc divisible au

moins par un nombre premier moindre que a : ce qui est impossible ; car on est arrivé au diviseur a, après avoir essayé inutilement la division de N par tous les nombres premiers moindres que a. Aucune division ne pouvant réussir, le nombre N est premier absolu.

REMARQUE. *Le calcul restant à faire, à quelque point que l'on soit rendu, revient toujours à trouver* TOUS *les facteurs premiers du dernier quotient exact obtenu.* (Voir les égalités de l'exemple.)

Chaque quotient n'admet aucun diviseur premier moindre que le diviseur qui l'a fourni. Pour le prouver, observons que ce quotient a pour multiples tous les nombres écrits au-dessus de lui, y compris le nombre proposé lui-même. Cela posé, soit f un des nombres premiers inférieurs au diviseur qui a fourni le quotient considéré. D'après notre règle, f qui a été nécessairement essayé une fois, ou plusieurs fois, comme diviseur, a dû être abandonné comme ne divisant pas au moins un des nombres écrits au-dessus de notre quotient ; donc f ne divise pas ce quotient ; car s'il le divisait, il diviserait tous ces nombres précédents, ce qui n'est pas.

CONSÉQUENCE. *Si un quotient n'est pas divisible par le diviseur premier qui l'a fourni, il est inutile, pour continuer, d'essayer sa division par les nombres premiers inférieurs à ce dernier diviseur.*

97. La méthode précédente est la plus régulière, la plus sûre pour la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers. Mais on n'est pas toujours obligé de la suivre. On opère souvent plus simplement et plus rapidement en décomposant le nombre en facteurs non premiers dont on connaît d'avance la composition particulière, ou bien auxquels il est plus facile d'appliquer la règle générale.

Ex. : 5400. On voit de suite que $5400 = 54 \times 100 = 9 \times 6 \times 2^2 \times 5^2 = 3^2 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5^2 = 3^3 \times 2^3 \times 5^2$.

$1320 = 132 \times 10 = 6 \times 22 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 11 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11$.

On fera ainsi quand le nombre sera terminé par des zéros, ou que les caractères de divisibilité feront reconnaître l'existence de facteurs composés tels que 4, 8, 6, 9, etc...

95. Nous allons maintenant résoudre un autre problème important.

Calculer tous les diviseurs d'un nombre donné.

On décompose d'abord le nombre en ses facteurs premiers; ces facteurs sont les diviseurs *simples* du nombre proposé. *Tous les autres diviseurs sont des produits de ces facteurs premiers*; aussi les appelle-t-on quelquefois les diviseurs *composés*. La règle, pour trouver ces diviseurs, et la définition précédente, se fondent sur cette proposition.

98. *Pour que deux nombres soient divisibles l'un par l'autre, il faut et il suffit, 1° que chaque facteur premier du diviseur soit un des facteurs premiers du dividende; 2° que l'exposant de chaque facteur premier du diviseur ne surpasse pas l'exposant du même facteur dans le dividende.*

Soit, en effet, N un nombre donné, D un de ses diviseurs, et q le quotient de N par D; supposons D décomposé en ses facteurs premiers, et soit $D = 2^3 \times 5^2 \times 7^4$. Nous avons $N = D \times q$, et par suite $N = 2^3 \times 5^2 \times 7^4 \times q$. D'après cette égalité, on aurait N décomposé en ses facteurs premiers, en décomposant q, et mettant les facteurs premiers de q à côté de $2^3 \times 5^2 \times 7^4$. Il résulte de là, 1° que 2^3, 5^2, 7^4 sont des facteurs de N; 2° que l'exposant de 2 dans N est au moins 3, celui de 5 au moins 2, et celui de 7 au moins 4. Les conditions indiquées *sont donc nécessaires. Elles sont suffisantes* : en effet, supposons $N = 2^4 \times 5^3 \times 7^4 \times 19$, et soit un nombre $A = 2^3 \times 5^2 \times 7^4$, remplissant à l'égard de N lesdites conditions. N est évidemment divisible par 2^3, par 5^2, par 7^4; N divisible par chacun de ces trois nombres premiers entre eux, deux à deux, est divisible par leur produit A (91).

99. Nous allons chercher les diviseurs d'une nombre donné N, en ayant égard à ces conditions, et nous appuyant sur ce théorème démontré : Tout nombre divisible par plusieurs autres premiers, deux à deux, est divisible par leur produit.

Supposons le nombre donné N décomposé en ses facteurs premiers, et soit $N = 2^3 \times 3^2 \times 5^4 \times 7$.

Évidemment les nombres du tableau suivant sont des diviseurs de N.

$$\begin{array}{lllll}
1, & 2, & 2^2, & 2^3, & \\
1, & 3, & 3^2, & & \\
1, & 5, & 5^2, & 5^3, & 5^4, \\
1, & 7. & & &
\end{array}$$

Ce tableau renferme *tous* les facteurs premiers de N et *toutes* les puissances de ces facteurs premiers, qui peuvent ou isolément diviser N, ou entrer par multiplication dans la composition d'un diviseur de N (98).

Par conséquent, on aura des diviseurs de N, et on aura *tous* ces diviseurs, en formant tous les produits différents des nombres de ce tableau multipliés deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, avec cette condition que l'on ne prendra jamais pour un même produit plus d'un facteur dans la même ligne horizontale. On est donc conduit à cette règle.

Pour former tous les diviseurs d'un nombre, décomposez-le en ses facteurs premiers (96). *Placez dans une première ligne horizontale l'unité et les puissances successives du plus petit facteur premier, depuis la première puissance jusqu'à celle qui entre comme facteur dans le nombre proposé, en suivant l'ordre de grandeur des exposants; ces puissances doivent être calculées, non pas seulement indiquées. Écrivez de même l'unité et les puissances successives du facteur premier immédiatement supérieur au précédent, depuis la première puissance jusqu'à celle qui entre comme facteur dans le nombre donné, et ainsi de suite pour chacun des facteurs premiers du nombre donné. Ce tableau étant formé, multipliez tous les nombres de la première ligne successivement par chacun de ceux de la deuxième. Multipliez ensuite tous les produits obtenus par les nombres de la troisième ligne. Multipliez encore tous ces nouveaux produits par les nombres de la quatrième ligne, et ainsi de suite, jusqu'à ce que vous ayez employé toutes les lignes... Les* DERNIERS *produits obtenus* en multipliant par les nombres compris dans la dernière ligne du tableau, *composent la liste des diviseurs du nombre donné, y compris l'unité et le nombre lui-même.*

100. Ce calcul fait, on fera bien de compter les diviseurs, pour voir si on n'en a omis aucun.

Pour trouver le nombre de ces diviseurs, ajoutez une unité à l'exposant de chaque facteur premier dans le nombre proposé; multipliez ces exposants ainsi augmentés; le produit obtenu exprime le nombre des diviseurs du nombre donné.

Pour prouver la vérité de cette dernière proposition, il suffit d'observer que le calcul des diviseurs revient à la formation du produit suivant :

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5+5^2+5^3+5^4)(1+7),$$

en supposant $N=2^3\times 3^2\times 5^4\times 7$.

Les termes de ce produit seront les diviseurs de N.

Il est facile de voir qu'il y en a $(3+1)(2+1)(4+1)(1+1)$.

101. Dans la pratique, on abrége le calcul par la remarque suivante :

Quand on fait la multiplication d'une série de nombres déjà calculés et écrits, par une suite de nombres telle que celle-ci : $1+5+5^2+5^3+\ldots$, on conserve d'abord simplement les nombres écrits, comme étant les produits de ces nombres eux-mêmes par 1. On les multiplie par 5 ; et on écrit les produits à la suite ou au-dessous. Pour avoir les produits contenant 5^2, il suffit de multiplier, par 5, ceux que l'on vient d'obtenir, en employant une première fois ce facteur 5 ; on aura les produits contenant 5^3 en multipliant par 5 les derniers obtenus, qui renferment 5^2, et ainsi de suite.

102. On donne ordinairement au calcul la disposition suivante, que nous expliquons en détail.

Trouver tous les diviseurs de 76440.

Il faut d'abord décomposer ce nombre en ses facteurs premiers ; on continue par le calcul des diviseurs.

	1	1.
76440	2	2.
38220	2	4.
19110	2	8.
9555	3	3.6.12.24.
3185	5	5.10.20.40.15.30.60.120.
637	7	7.14.28.56.21.42.84.168.35.70.140.280.105.210.420.840.
91	7	49.98.196.392.147.294.588.1176.245.490.980.1960.735
		1470.2940.5880.
13	13	13.26.52.104.39.78.156.312.65.130.260.520.195.390.780.
1		1560.91.182.364.728.273.546.1092.2184.455 910.1820.
		3640.1365.2730.5460.10920.637.1274.2548 5096.1911.
		3822.7644.15288.3185.6370.12740.25480.9555.19110.
		38220.76440.

Tous les facteurs premiers trouvés, on a formé les puissances successives de 2, en multipliant 1 par le premier facteur 2, puis 2 par le deuxième facteur 2, la deuxième puissance de 2 par le

troisième facteur 2 ; on a écrit chaque produit à côté du multiplicateur qui le fournit. On a ensuite multiplié l'unité et toutes les puissances de 2 par 3, et on a écrit tous les produits, à droite, sur la même ligne que le multiplicateur 3. Si 3 avait été deux fois facteur comme plus bas 7, on aurait multiplié par 3 lui-même tous les produits écrits à la droite de 3 ; mais il n'y a pas lieu dans notre exemple. On a multiplié par 5 tous les diviseurs obtenus depuis 1 inclusivement jusqu'au dernier 24 ; et on a écrit tous ces produits à la suite les uns des autres à la droite de 5. Cela fait, on a multiplié par 7 tous les diviseurs obtenus jusqu'ici de 1 à 120, et on a écrit tous ces produits à la droite de 7. Pour avoir les produits qui renferment 7^2, on multiplie de nouveau, par 7, tous les produits que nous venons d'obtenir en employant 7, une première fois, comme facteur, ces produits s'écrivant à la droite du second 7. S'il y avait eu un troisième facteur 7, on aurait multiplié par ce troisième facteur ceux qu'on vient de placer à la droite du deuxième facteur 7, et on aurait écrit tous ces produits à la droite du troisième 7.

Il ne restait plus qu'à multiplier par 13 tous les diviseurs déjà obtenus à partir de 1 inclusivement, c'est ce que nous avons fait. Nous avons séparé les facteurs premiers de la table des diviseurs par un trait vertical. Nous avons mieux aimé les récrire pour bien distinguer les divers multiplicateurs et les diverses séries de diviseurs correspondants.

Le nombre des diviseurs doit être

$$(3+1)(1+1)(1+1)(2+1)(1+1)=4.2.2.3.2.=96.$$

COMPOSITION DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET DU PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DE PLUSIEURS NOMBRES DONNÉS.

103. *On peut trouver immédiatement le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres décomposés en leurs facteurs premiers.*

RÈGLE. *On prend tous les facteurs premiers communs aux nombres donnés ; on donne à chacun de ces facteurs le plus faible des exposants qu'il a dans les nombres donnés ; le produit de ces facteurs est le p. g. c. d. cherché.*

Prenons pour exemple les nombres :

$$A = 2^4.3^2.5^3 \times 13, \quad B = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 19, \quad C = 2^6 \times 3^3 \times 5 \times 11.$$

En appliquant la règle, on trouve $D = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

DÉMONSTRATION. Deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre soit diviseur commun des nombres donnés. Ce nombre étant décomposé en ses facteurs premiers, 1° ne doit renfermer que des facteurs premiers existant dans tous les nombres donnés, c'est-à-dire communs à tous ces nombres (96); 2° il ne doit renfermer aucun de ces facteurs communs avec un exposant plus élevé que le plus faible des exposants qu'a ce facteur dans les nombres proposés; par exemple, il ne saurait renfermer 3^3, car alors il ne serait pas diviseur de A, qui renferme seulement 3^2. Or le nombre D composé suivant notre règle remplit évidemment ces deux conditions, mais ne les remplirait plus si on changeait un seul de ses facteurs, ou si on lui donnait un seul facteur premier de plus; donc D est un diviseur commun des nombres donnés, et c'est leur p. g. c. d.

104. COROLLAIRE. *Tout diviseur commun de plusieurs nombres divise leur plus grand commun diviseur.*

En effet, il résulte de la démonstration précédente que le p. g. c. d. renferme tous les facteurs premiers que peut renfermer un diviseur commun quelconque, et chacun de ces facteurs avec un exposant au moins aussi élevé que ce diviseur quelconque (96).

La réciproque de cette proposition est évidente. *Tout nombre qui en divise deux autres divise leur p. g. c. d.*

105. On déduit de là une règle pour obtenir tous les diviseurs communs à des nombres donnés :

Il suffit de former leur plus grand commun diviseur et de chercher tous les diviseurs de ce plus g. c. d.

106. Proposons-nous encore de trouver *le plus petit multiple commun de plusieurs nombres donnés*, c'est-à-dire, *le plus petit nombre divisible à la fois par tous ces nombres.*

RÈGLE. *Pour avoir le plus petit multiple commun de plusieurs nombres donnés, on les décompose en leurs facteurs premiers; on prend ensuite tous les facteurs différents qui entrent dans la composition des nombres donnés; on donne à chacun de ces facteurs le*

plus fort des exposants qu'il a dans ces nombres ; le produit de ces facteurs est le plus petit multiple commun demandé.

Prenons pour exemple les nombres :

$$A = 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 13\,;\ B = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 19\,;\ C = 2^5 \times 3^3 \times 5 \times 11.$$

En appliquant la règle nous trouvons

$$m = 2^5 \times 3^4 \times 5^3 \times 13 \times 19 \times 11.$$

Démonstration. Deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre soit divisible à la fois pour tous les nombres donnés : ce nombre étant décomposé en ses facteurs premiers, 1° doit renfermer tous les facteurs premiers différents qui existent dans les nombres donnés; car s'il lui en manquait un seul, par exemple 19, il ne serait pas multiple du nombre B qui a le facteur 19 (96); 2° il doit renfermer chacun de ces facteurs premiers avec un exposant au moins égal au plus fort des exposants qu'a ce facteur dans les nombres donnés; en effet, s'il renfermait seulement 2^4, par exemple, il ne serait pas divisible par le nombre C qui renferme 2^5 (96). Or le nombre m, composé suivant notre règle, remplit évidemment les deux conditions que nous venons d'énoncer, *mais ne les remplirait plus si on changeait un seul de ses facteurs, ou si on lui donnait un seul facteur de moins.* Ce nombre m est donc un multiple commun des nombres donnés, et c'est leur plus petit multiple commun.

107. Corollaire. *Tout multiple commun de plusieurs nombres donnés est divisible par leur plus petit multiple commun.*

En effet, en vertu des deux conditions ci-dessus exprimées, chaque facteur de m doit exister dans un multiple commun quelconque avec un exposant au moins égal à celui qu'il a dans m (96).

Lorsque plusieurs nombres sont premiers entre eux, deux à deux, leur plus petit multiple commun est le produit même de ces nombres.

En effet, ce plus petit multiple commun doit être divisible par ce produit (91); il n'est donc pas moindre que lui.

Théorème à démontrer. *En multipliant le plus petit multiple*

commun de deux nombres par leur plus g. c. d., on obtient un produit égal à celui des deux nombres proposés eux-mêmes (*).

APPENDICE A LA DIVISIBILITÉ.

Divisibilité par 11.

*108. RÈGLE. *Pour trouver le reste de la division d'un nombre par* 11, *on opère de la manière suivante :*

On fait d'une part la somme des valeurs absolues des chiffres de rang impair à partir de la droite, de l'autre la somme des valeurs absolues des chiffres de rang pair; on retranche la seconde somme de la première. Si le reste est zéro, le nombre proposé est divisible par 11. *Si on trouve un reste différent de zéro, la division de ce reste par* 11 *donnera le même reste que la division du nombre proposé par* 11. *Si la soustraction indiquée ne peut se faire parce que la première somme est plus petite que la seconde, on augmente cette somme trop faible d'un multiple de* 11 *strictement suffisant pour que la soustraction puisse se faire; puis on effectue cette soustraction; le reste obtenu est le reste cherché de la division du nombre proposé par* 11.

COROLLAIRE. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 11, *il faut et il suffit que la différence entre la somme des valeurs absolues de ses chiffres de rang impair, à partir de la droite, et la somme des chiffres de rang pair soit zéro ou un multiple de* 11.

1er Ex. : 65487;	1re somme	$7+4+6=17$
	2e *id.*	$8+5=\underline{13}$
	Différence :	4

65487 n'est pas divisible par 11, et le reste de sa division par 11 est 4.

2e Ex. : 835487;	1re somme	$7+4+3=14$
	2e *id.*	$8+5+8=\underline{21}$

La soustraction ne pouvant se faire, on augmente 14 d'une fois 11, ce qui donne 25; puis on soustrait 21 de 25; il reste 4; la division de 835487 par 11 donne le reste 4.

Tout cela est fondé sur les principes suivants :

L'unité suivie d'un nombre pair de zéros exprime un multiple de 11, *augmenté de* 1.

L'unité suivie d'un nombre impair de zéros exprime un multiple de 11 *diminué de* 1.

Commençons la division par 11 d'une puissance quelconque de 10.

(*) Il y a une autre théorie du plus petit multiple commun dans laquelle on le déduit du p. g. c. d., d'après ce dernier théorème; mais la précédente nous paraît plus simple.

$$\begin{array}{r|l} 1000000 & 11 \\ \cline{2-2} 100 & 90909 \\ 100 & \\ 1 & \end{array}$$

Dans cette division, comme on le voit de suite, il n'y a que deux restes différents, 10 et 1. Quand on a employé un nombre pair de zéros, on a le reste 1 quand on en a employé un nombre impair, on a le reste 10. Si donc il y a, en tout, dans le dividende, un nombre pair de zéros, le reste final sera 1; appelons m le quotient écrit, nous aurons alors une égalité comme celle-ci :

$$10000 = 11 \times m + 1 = \text{un multiple de } 11, \text{ plus } 1.$$

Si au contraire le dividende est l'unité suivie d'un nombre impair de zéros, le reste final étant 10, on aura une égalité comme celle-ci :

$$100000 = 11 \times m + 10 = 11 \times m + 11 - 1 = \text{un multiple de } 11, \text{ moins } 1.$$

Notre proposition est donc démontrée.

COROLLAIRE. *Un chiffre significatif suivi d'un nombre pair de zéros est un multiple de* 11, *plus la valeur absolue de ce chiffre.*

Un chiffre significatif suivi d'un nombre impair de zéros est un multiple de 11, *diminué de la valeur absolue de ce chiffre.*

Exemple :

$$60000 = 10000 \times 6 = (11 \times m + 1) \times 6 = 11 \times (m \times 6) + 6. \quad (42)$$
$$6000 = 1000 \times 6 = (11 \times m - 1) \times 6 = 11 \times \ m \times 6 \ - 6. \quad (43)$$

Passant maintenant à un nombre quelconque, nous observerons que la valeur relative d'un chiffre de rang impair, en allant de droite à gauche, est égale à ce chiffre suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres après lui dans le nombre, c'est-à-dire, à ce chiffre suivi d'un nombre pair de zéros; cette valeur relative est donc un multiple de 11, plus la valeur absolue de ce chiffre.

On voit de même que la valeur relative d'un chiffre de rang pair est égale à un multiple de 11 diminué de la valeur absolue de ce chiffre; de là on conclurait comme pour 9. Prenons un exemple : 35487.

Nous poserons

$$\begin{array}{rcl} 7 & = & 7 \\ 80 & = & \text{un m. de } 11 - 8 \\ 400 & = & \text{un m. de } 11 + 4 \\ 5000 & = & \text{un m. de } 11 - 5 \\ 30000 & = & \text{un m. de } 11 + 3 \\ \hline 35487 & = & \text{un m. de } 11 + (7+4+3) - (8+5). \end{array}$$

Un nombre quelconque est donc égal à un multiple de 11, *plus la somme des*

valeurs ABSOLUES *des chiffres de rang impair, en allant de droite à gauche, moins la somme des chiffres de rang pair.*

$$N = 11 \times m + S - S' \ (1),$$

en appelant S et S' les deux sommes dans l'ordre indiqué.

Il peut arriver trois cas : on peut avoir $S = S'$, $S > S'$, et $S' > S$.

1[er] CAS. $S = S'$. La différence $S - S'$ étant nulle, le nombre N est un multiple de 11; $N = 11 \times m$.

2[e] CAS. $S > S'$. Soit $S - S' = D$; alors $N = 11 \times m + D$.

N se composant d'un multiple de 11, plus D, le reste de la division de D par 11 est le même que celui de la division de N lui-même par 11 (65).

Si D est un multiple de 11, N est divisible par 11.

3[e] CAS. S est moindre que S'; la soustraction n'est pas possible; on augmente S d'un multiple de 11 simplement suffisant pour que la soustraction puisse se faire; soit $11 \times n$, ce multiple de 11; on peut écrire

$$N = 11 \times m - 11 \times n + 11 \times n + S - S'.$$

Supposons que $(11 \times n + S) - S' = D'$

On a $N = 11 \times m - 11 \times n + D'$.

N se composant d'un multiple de 11, $(11\,m - 11 \times n)$, et du nombre D', moindre que 11, il est évident que D' est le reste de la division de N par 11. V. le deuxième exemple cité.

Remarque. On peut faire la preuve de la multiplication ou de la division par 11 comme on la fait par 9. Dites 11 au lieu de 9 dans tout ce qui a été expliqué sur ces preuves, et vous aurez les règles ou explications relatives aux preuves susdites par 11. Cette preuve n'est pas sûre.

109. DIVISIBILITÉ PAR 7. *Pour trouver le reste de la division d'un nombre par 7, on le partage en tranches de trois chiffres chacune ; de droite à gauche, la dernière tranche à gauche pouvant seule n'avoir qu'un ou deux chiffres. On fait, d'une part, la somme des tranches de rang pair, considérées comme des nombres isolés; on additionne d'autre part les tranches de rang impair. On retranche la seconde somme de la 1[re]. Si la différence est zéro ou un multiple de 7, le nombre est divisible par 7. Si on trouve un reste différent de zéro, etc..., la fin comme pour* 11.

Mettez 13 au lieu de 7 dans ce qui précède, et vous aurez un caractère de divisibilité par 13.

Tout cela se fonde sur ce que $1000 = \text{mult. de } 7 - 1$, ou $13 \times m - 1$; $1000000 = \text{mult. de } 7 + 1$, ou $13 \times m + 1$.

LIVRE III.

FRACTIONS ORDINAIRES ET FRACTIONS DÉCIMALES.

CHAPITRE PREMIER.

FRACTIONS ORDINAIRES.

Notions préliminaires sur la mesure des grandeurs.

110. Le nombre doit son origine, avons-nous dit en commençant, à la considération de plusieurs objets semblables ou de même espèce dont on a voulu exprimer la réunion. Ex. : *vingt soldats, quinze pommes.* Plus tard, et par extension, on s'est servi des nombres pour exprimer la mesure de toutes les grandeurs.

On appelle *grandeur* ou *quantité* tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Ex. : *une longueur, une somme d'argent.*

On ne considère en mathématiques que des grandeurs susceptibles d'être mesurées.

Mesurer une grandeur, c'est s'en faire une idée précise en la comparant à une autre grandeur de même espèce, que l'on connaît, et avec laquelle on est déjà familiarisé.

Par exemple, si on veut se faire une idée précise de la longueur d'un mur, on prend un *mètre,* et on le porte d'un bout à l'autre du mur, à la suite de lui-même, autant de fois que possible. Supposons qu'on ait pu le porter huit fois exactement; on dit alors que le mur a huit mètres de long, et cette simple indication donne, à quiconque connaît le mètre, une idée précise de la longueur du mur.

On appelle, en général, *unité*, une grandeur choisie arbitrairement pour servir de terme de comparaison, *ou de commune mesure*, à toutes les grandeurs de son espèce (*).

Nous avons cité le *mètre*, unité de longueur; nous citerons encore le *gramme*, unité de poids, et *le franc*, unité de monnaie.

Le résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité s'exprime *par un nombre*.

Ainsi, plus haut, le nombre huit nous a servi à exprimer le résultat de la comparaison de la longueur du mur au mètre, unité de longueur.

Quand une grandeur se compose exactement de l'unité répétée un certain nombre de fois, elle s'exprime par un nombre entier. *Ex.* : vingt francs, dix-huit mètres, vingt pommes.

Mais il peut arriver qu'une grandeur se trouve composée d'un certain nombre d'unités, plus une dernière partie moindre que l'unité et qu'il faut mesurer; ou bien, en essayant de mesurer une grandeur, on trouve tout d'abord qu'elle est plus petite que l'unité employée.

Alors on partage l'unité en 2, 3 ou 4... parties égales entre elles, puis on mesure la grandeur moindre que l'unité avec l'une de ces parties égales de l'unité; si on trouve que cette grandeur se compose exactement de l'une de ces parties, ou d'une de ces parties répétée un certain nombre de fois, cette grandeur s'exprime à l'aide d'une *fraction* (111).

Il peut arriver enfin qu'une grandeur ne rentre dans aucun des deux cas précédents, qu'elle ne puisse pas être exactement mesurée avec aucune partie aliquote ou subdivision de l'unité employée; on dit alors que la grandeur est incommensurable avec cette unité; elle ne peut être mesurée qu'approximativement avec cette unité.

FRACTIONS ORDINAIRES.

111. DÉFINITIONS. On appelle FRACTION *un nombre obtenu en divisant l'unité en un certain nombre de parties égales, et prenant une ou plusieurs de ces parties.*

(*) Cette définition de l'unité s'accorde avec celle qui a été donnée page 1.

Un nombre FRACTIONNAIRE *est un nombre composé d'un nombre entier et d'une fraction.*

112. Une fraction *s'exprime au moyen de deux nombres : l'un, appelé* DÉNOMINATEUR, *indique en combien de parties on a divisé l'unité, et l'autre, appelé* NUMÉRATEUR, *indique combien on a pris de ces parties pour former la fraction.*

Supposons, par exemple, qu'ayant divisé l'unité en cinq parties égales, on ait employé trois de ces parties à former une fraction; le *dénominateur* de cette fraction est 5, et le *numérateur* 3.

113. Pour *énoncer* une fraction, *on énonce d'abord le numérateur, puis le dénominateur, en ajoutant seulement au nom du dénominateur la terminaison* IÈME. La fraction précédente s'énonce *trois cinquièmes.*

Il faut excepter de cette règle les fractions qui ont pour dénominateurs 2, 3, 4; pour celles-là, les parties s'appellent *demies, tiers, quarts,* au lieu de *deuxièmes, troisièmes, quatrièmes ; une demie, deux tiers, trois quarts.*

114. Pour *écrire* une fraction, *on écrit d'abord le numérateur, au-dessous le dénominateur, en séparant ces deux nombres par un trait horizontal.* Ex. : *trois cinquièmes; écrivez* $\frac{3}{5}$. On écrit quelquefois ainsi : 3/5.

115. *Une fraction peut être considérée comme le quotient de la division de son numérateur par son dénominateur.*

Par exemple, $\frac{3}{5}$ est le quotient de la division de 3 par 5, car $\frac{3}{5} \times 5 = 3$. En effet, 5 *fois* 3 cinquièmes $=$ 3 *fois* 5 cinquièmes $=$ 3 unités, puisque 5 cinquièmes composent l'unité, et 5 fois 3 $=$ 3 fois 5.

On peut encore démontrer comme il suit :

$\frac{3}{5}$ est le quotient de la division de 3 par 5, ou la 5e partie de 3; car on obtient la cinquième partie de $3 = 1 + 1 + 1$, en prenant la cinquième partie de chacune de ces trois unités, qui est justement ce qu'on appelle $\frac{1}{5}$, et réunissant ces trois cinquièmes d'unité; ce qui donne la fraction $\frac{3}{5}$.

116. *Lorsque le quotient de deux nombres entiers donne un reste, on complète la partie entière du quotient en y joignant une fraction ayant pour numérateur le reste, et pour dénominateur le diviseur* (28).

Prenons pour exemple la division de 432 par 15 qui donne le quotient 28 et le reste 12. Le quotient de 432 par 15 peut se définir la 15ᵉ partie de 432.

Or $432 = 28 \times 15 + 12$. La 15ᵉ partie de $28 \times 15 = 28$; il reste à prendre la 15ᵉ partie de 12, ce qui revient à prendre la 15ᵉ partie de chacune des 12 unités, puis à ajouter tous ces 15ᵐᵉˢ; or la 15ᵉ partie de 1 est $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{15}$ répété 12 fois donne $\frac{12}{15}$. Il faut joindre $\frac{12}{15}$ à 28; ce qui donne en tout $28 + \frac{12}{15}$ pour le quotient complet de 432 par 15.

117. On appelle souvent *expressions fractionnaires* les fractions plus grandes que l'unité.

Une fraction est inférieure ou supérieure à l'unité, suivant que le numérateur est plus petit ou plus grand que le dénominateur.

Dans l'étude des fractions, on ne fait généralement aucune différence entre les fractions proprement dites, et celles que nous venons d'appeler expressions fractionnaires. Il n'y a d'exception que pour les cas où l'on doit considérer, pour en tenir compte, si le numérateur est plus petit ou plus grand que le dénominateur.

118. *Étant donné un nombre fractionnaire* $28 + \frac{12}{15}$, *on propose de le convertir en une simple expression fractionnaire;* c'est ce qu'on appelle *joindre l'entier à la fraction.*

On raisonnera ainsi : chaque unité valant 15 quinzièmes, 28 unités valent 28 fois 15 quinzièmes, ou 420 quinzièmes, 420 quinzièmes ajoutés à 12 quinzièmes donnent 432 quinzièmes.

$$28 + \frac{12}{15} = \frac{432}{15}.$$

On est ainsi conduit à la règle suivante :

Pour réduire un nombre fractionnaire en une seule expression fractionnaire, on multiplie l'entier par le dénominateur de la

fraction; au produit on ajoute le numérateur, et on donne à la somme, pour dénominateur, le dénominateur de la fraction donnée.

119. *Étant donnée une expression fractionnaire, on propose d'en extraire les entiers; soit pour exemple* $\frac{48}{9}$.

Chaque unité valant 9 neuvièmes, autant de fois il y a 9 neuvièmes dans 48 neuvièmes, autant il y a d'unités dans ce dernier nombre. En 48 il y a 5 fois 9, et il reste 3; en 48 neuvièmes il y a 5 fois 9 *neuvièmes*, ou 5 unités, et de plus 3 neuvièmes :

$$\frac{48}{9} = 5 + \frac{3}{9}.$$

RÈGLE. *Pour extraire les entiers d'une expression fractionnaire, on divise le numérateur par le dénominateur. Le quotient entier est le nombre des unités contenues dans l'expression fractionnaire; à ce nombre entier on joint une fraction qui a pour numérateur le reste, et pour dénominateur le diviseur.*

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES FRACTIONS.

120. Faisons d'abord une remarque.

Si un dénominateur est 2, 3, 4... n *fois plus petit qu'un autre, les parties de la première fraction sont* 2, 3, 4...n *fois plus grandes que celles de la seconde,* et vice versâ.

Ex. : $\frac{1}{3}$ est quatre fois plus grand que $\frac{1}{12}$. En effet, l'unité se compose de trois tiers. Si l'on subdivise chaque tiers en quatre parties égales, l'unité contiendra douze de ces nouvelles parties, qui sont par conséquent des douzièmes; donc 1 tiers = 4 douzièmes; $\frac{1}{3}$ est quatre fois plus grand que $\frac{1}{12}$; c'est ce qu'il faut prouver.

121. THÉORÈME. *Si l'on multiplie ou divise le numérateur d'une fraction par un certain nombre, sans changer le dénominateur, la fraction est rendue ce nombre de fois plus grande ou plus petite.*

Soit par exemple la fraction $\frac{3}{5}$, dont nous multiplierons le numérateur par 4 ; nous obtiendrons ainsi la fraction $\frac{12}{5}$, quatre fois plus grande que $\frac{3}{5}$. En effet, les parties de $\frac{12}{5}$ sont de même grandeur que celles de $\frac{3}{5}$, et il y a quatre fois plus de parties dans $\frac{12}{5}$ que dans $\frac{3}{5}$. Divisons maintenant par 3 le numérateur seulement de la fraction $\frac{6}{11}$; nous obtenons une fraction $\frac{2}{11}$, trois fois moindre que $\frac{6}{11}$. En effet, les parties de $\frac{6}{11}$ et de $\frac{2}{11}$ sont les mêmes, et il y a trois fois moins de ces parties dans $\frac{2}{11}$ que dans $\frac{6}{11}$.

122. Théorème. ***Si on divise ou si on multiplie le dénominateur d'une fraction par un certain nombre, sans changer le numérateur, la fraction est rendue ce nombre de fois plus grande ou plus petite.***

1° Ex. : $\frac{7}{12}$; en divisant le dénominateur par 4, on trouve $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{3}$ est quatre fois plus grande que $\frac{7}{12}$. En effet, les parties qui composent $\frac{7}{3}$ sont quatre fois plus grandes que celles de $\frac{7}{12}$ (120), et il y a le même nombre de parties dans les deux fractions.

Autrement : 1 tiers $=$ 4 douzièmes ; 7 tiers $=$ 7 *fois* 4 douzièmes $=$ 4 *fois* 7 douzièmes ; $\frac{7}{3} = 4$ fois $\frac{7}{12}$: c'est ce qu'il faut prouver.

2° Ex. : $\frac{7}{4}$; en doublant le dénominateur, on trouve $\frac{7}{8}$, frac-

tion 2 fois moindre que $\frac{7}{4}$. En effet, les parties de la première fraction sont 2 fois moindres que celles de la première (120), et il y a le même nombre de parties dans les deux fractions.

Autrement, comme plus haut : 1 quart = 2 huitièmes, etc...

123. THÉORÈME. *Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre.*

Soit la fraction $\frac{3}{8}$, dont nous multiplierons les deux termes par 4, ce qui nous donnera $\frac{12}{32}$. Chaque huitième vaut 4 trente-deuxièmes (120) ; 3 huitièmes valent 3 fois 4 trente-deuxièmes, ou 12 trente-deuxièmes ; ce qu'il faut prouver.

En divisant par 3 les deux termes de la fraction $\frac{15}{18}$, on trouve $\frac{5}{6}$; on dit de même : chaque sixième valant 3 dix-huitièmes ; 5 sixièmes valent 5 fois 3 dix-huitièmes, ou 15 dix-huitièmes.

124. *Pourrait-on de même augmenter ou diminuer d'un même nombre les deux termes d'une fraction sans en changer la valeur ?*

On peut voir facilement que non.

En ajoutant un même nombre aux deux termes d'une fraction, on augmente cette fraction si elle est moindre que l'unité ; on la diminue dans le cas contraire (*).

RÉDUCTION D'UNE FRACTION A UNE PLUS SIMPLE EXPRESSION, A SA PLUS SIMPLE EXPRESSION. DES FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES.

125. *Simplifier une fraction c'est la remplacer par une fraction égale ayant des termes moindres.*

On y parvient en divisant les deux termes de cette fraction par les diviseurs communs qu'ils peuvent avoir.

Ex. : $\frac{210}{252}$. On trouve successivement $\frac{210}{252} = \frac{105}{126} = \frac{35}{42} = \frac{5}{6}$.

On a d'abord divisé les deux termes de $\frac{210}{252}$ par 2, ceux de $\frac{105}{126}$ par 3 ; enfin ceux de $\frac{35}{42}$ par 7.

(*) La démonstration, p. 103 (Appendice à la théorie des fractions).

126. Une fraction *est dite irréductible,* ou bien *réduite à sa plus simple expression,* quand elle n'est *égale à aucune fraction* ayant des termes respectivement moindres que les siens.

127. Théorème. *Quand les termes d'une fraction sont premiers entre eux, cette fraction est irréductible.*

En effet,

Quand les termes d'une fraction sont premiers entre eux, toute fraction égale a pour termes des équi-multiples des termes de cette fraction donnée.

Ex. : $\frac{5}{7}$, dont les termes 5 et 7 sont premiers entre eux ; supposons que l'on ait $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$. Si nous réduisons ces fractions au même dénominateur, les numérateurs obtenus devront être égaux ; on trouve ainsi : $\frac{a \times 7}{b \times 7} = \frac{5 \times b}{7 \times b}$; d'où $a \times 7 = 5 \times b$. Le nombre 5 divisant le 2ᵉ produit divise le produit égal $a \times 7$; mais 5 est premier avec 7; donc il doit diviser l'autre facteur a; on doit avoir $a = 5 \times m$, m étant un nombre entier. Si dans l'égalité $a \times 7 = 5 \times b$, on remplace a par la valeur $5 \times m$, il vient $5 \times m \times 7 = 5 \times b$; d'où, en divisant des deux parts par 5, on conclut $b = 7 \times m$. Les deux nombres a et b sont donc des équimultiples $5 \times m$; $7 \times m$ de 5 et de 7. Ce qu'il fallait prouver.

m étant au moins égal à 1, a égale au moins 5, b égale au moins 7; donc, aucune fraction $\frac{a}{b}$ égale à $\frac{5}{7}$ n'a des termes moindres que 5 et 7. Lors donc qu'une fraction a ses termes premiers entre eux, elle est irréductible. De là cette règle :

128. Règle. *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, on cherche le plus grand commun diviseur de ses deux termes, et on divise ces deux termes par le p. g. c. d.*

En effet, quand on a divisé les deux termes de la fraction proposée par leur p. g. c. d., on a, pour quotients deux nombres premiers entre eux (81), qui, d'après le théorème précédent, forment une fraction irréductible.

Ex. : $\frac{210}{25}$. Le p. g. c. d. de 210 et 252 est 42; 210 et 252 divisés

respectivement par 42 donnent les quotients 5 et 6; $\frac{5}{6}$ est la fraction $\frac{210}{252}$ réduite à sa plus simple expression.

129. THÉORÈME. *Toute fraction égale à une fraction irréductible a ses termes équi-multiples des termes de cette fraction irréductible.*

En effet, les termes d'une fraction irréductible sont évidemment premiers entre eux ; or, quand les termes d'une fraction sont premiers entre eux, toute fraction égale, etc. (nº 127, 2e énoncé).

130. COROLLAIRE. *Si deux fractions irréductibles sont égales, leurs termes doivent être égaux, chacun à chacun.*

soient $\frac{5}{7}$, $\frac{c}{d}$, deux fractions irréductibles. La fraction $\frac{c}{d}$ étant égale à la fraction irréductible $\frac{5}{7}$, on doit avoir $c = 5 \times m$, $d = 7 \times m$, m étant un nombre entier. Mais, dans notre hypothèse, on doit avoir $m = 1$; autrement, c et d admettant un diviseur commun m autre que 1, $\frac{c}{d}$ ne serait pas irréductible ; ce qui est contre l'hypothèse; donc $c = 5$, $d = 7$.

131. COROLLAIRE. *Deux fractions égales réduites à leurs plus simples expressions donnent lieu à la même fraction irréductible, terme pour terme.*

Ou bien, *de quelque manière qu'on s'y prenne pour réduire une fraction à sa plus simple expression, on arrive à la même fraction irréductible, terme pour terme.*

132. REMARQUE. Pour obtenir toutes les fractions égales à une fraction donnée, il suffit de réduire cette fraction à sa plus simple expression, puis de multiplier les deux termes de la fraction irréductible successivement par les nombres 1, 2, 3, 4, etc...

RÉDUCTION DES FRACTIONS AU MÊME DÉNOMINATEUR.

133. Quand des fractions ont le même dénominateur, on peut voir laquelle est la plus grande d'entre elles, on peut les additionner, les soustraire l'une de l'autre ; il est donc très-utile de savoir réduire les fractions au même dénominateur.

Réduire des fractions au même dénominateur, c'est trouver des fractions égales à ces fractions données, et ayant toutes le même dénominateur.

RÈGLE. *Pour réduire des fractions au même dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

Soient pour exemple les fractions : $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{11}{12}$.

Multiplions les termes 2 et 3 de la première par le produit effectué, $4 \times 5 \times 12 = 240$, des autres dénominateurs.

$$\frac{1}{3} = \frac{2 \times 4 \times 5 \times 12}{3 \times 4 \times 5 \times 12} = \frac{480}{720}.$$

Opérant de même pour $\frac{3}{4}$, on trouve

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times (3 \times 5 \times 12)}{4 \times (3 \times 5 \times 12)} = \frac{3 \times 180}{4 \times 180} = \frac{540}{720}.$$

On trouve de la même manière :

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times (3 \times 4 \times 12)}{5 \times (3 \times 4 \times 12)} = \frac{576}{720}.$$

Et enfin

$$\frac{11}{12} = \frac{11 \times 3 \times 4 \times 5}{12 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{660}{720}.$$

En observant cette règle, on ne change pas la valeur de chaque fraction, car on multiplie ses deux termes par un même nombre ; on est sûr d'avoir pour toutes les fractions le même dénominateur ; car on voit facilement dans le calcul précédent que chaque dénominateur nouveau est le produit de tous les dénominateurs des fractions données ; seulement, l'ordre de multiplication de ces dénominateurs est différent d'une fraction à l'autre (45).

REMARQUE. Quand on a appliqué la règle à la première fraction, on connaît le dénominateur commun. A partir de là, on peut continuer comme il suit : Pour transformer $\frac{3}{4}$, au lieu de

former le produit des autres dénominateurs, on peut diviser le dénominateur commun 720, que l'on vient de trouver, par le dénominateur 4 de 3/4, et multiplier les deux termes de $\frac{3}{4}$ par le quotient trouvé, 180. Il est évident qu'on obtiendra de cette manière 720 pour dénominateur d'une nouvelle fraction égale à 3/4; on pourra opérer de la même manière sur les autres fractions.

Il y a d'autres moyens que le précédent d'obtenir un dénominateur commun pour des fractions données.

134. *Tout multiple commun des dénominateurs des fractions données peut leur être donné pour dénominateur commun; on l'emploie de la manière suivante :*

On divise ce multiple commun par le dénominateur de la première fraction, et l'on multiplie les deux termes de cette fraction par le nombre entier obtenu pour quotient; on opère ensuite de la même manière et successivement pour les autres fractions données.

Ex. : $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{11}{12}.$

Il est facile de voir que 60 est un multiple commun de tous les dénominateurs. Je divise 60 par 3; le quotient est 20; je multiplie les deux termes de $\frac{2}{3}$ par 20; j'obtiens ainsi la fraction $\frac{40}{60}$ égale à $\frac{2}{3}$. Je divise ensuite 60 par 4, et je multiplie par le quotient, 15, les deux termes de $\frac{3}{4}$; j'obtiens ainsi $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$; de même : $\frac{60}{5} = 12$; par suite $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 12}{5 \times 12} = \frac{48}{60}$. Enfin $\frac{60}{12} = 5$; $\frac{11}{12} = \frac{11 \times 5}{12 \times 5} = \frac{55}{60}$.

Par l'emploi de cette règle, on ne change pas la valeur de chaque fraction, et on est sûr d'avoir le multiple commun pour dénominateur commun des fractions proposées. En effet, dans chaque calcul, on multiplie un diviseur (le dénominateur considéré) par un quotient; on doit nécessairement reproduire le dividende qui, chaque fois, est le multiple commun.

Il peut arriver que le plus grand dénominateur soit multiple de tous les autres ; on le prend alors pour dénominateur commun.

Quelquefois un dénominateur est divisible par plusieurs autres sans l'être par tous ; dans notre exemple, 12 est divisible par 3 et par 4. Alors, il suffit de trouver un nombre qui soit multiple de 12 et des dénominateurs qui ne divisent pas 12. On sera sûr qu'un pareil nombre sera divisible par tous les dénominateurs.

12 étant premier avec 5, nous avons pris plus haut $12 \times 5 = 60$.

Réduction des fractions à leur plus petit dénominateur commun.

135. Règle. *Pour réduire des fractions données à leur plus petit dénominateur commun, on les réduit d'abord à leurs plus simples expressions ; cela fait, on cherche le plus petit multiple commun des dénominateurs de ces fractions irréductibles* (106) ; *puis on le donne pour dénominateur commun à ces mêmes fractions en suivant la règle du n° 134.*

Soient par exemple les fractions $\frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}$ que nous prenons irréductibles ; si les fractions données ne l'étaient pas, on commencerait par les réduire. Cela posé, on voit facilement que tout dénominateur commun des fractions proposées, est un multiple commun des dénominateurs actuels. En effet, soit d un dénominateur commun quelconque ; les fractions étant réduites à ce dénominateur, supposons que l'on ait :

$$\frac{5}{7} = \frac{a}{d}, \frac{2}{3} = \frac{b}{d}, \frac{7}{12} = \frac{c}{d}, \frac{3}{4} = \frac{e}{d}, \text{ etc....}$$

La fraction $\frac{a}{d}$ étant égale à la fraction irréductible $\frac{5}{7}$, a et d doivent être des équi-multiples de 5 et 7 ; en particulier d est un multiple de 7. Pour une raison semblable, d est un multiple de 3, un multiple de 12, de 4, de 2, de 10. En résumé, d est un multiple commun des dénominateurs de nos fractions irréductibles. Nous ne pouvons donc choisir notre dénominateur commun que parmi les multiples communs de ces dénominateurs; mais nous

pouvons prendre le multiple que nous voudrons. Pour avoir le plus petit dénominateur commun, nous devons prendre évidemment le plus petit de ces multiples communs.

Nous mettons ici le calcul pour les fractions données.

	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$
$m = 2^2.3.5.7$	7	3	$2^2 3$	2^2	2	2×5
$m = 420$	60	140	35	105	210	42
	$\frac{300}{420}$	$\frac{280}{420}$	$\frac{245}{420}$	$\frac{315}{420}$	$\frac{210}{420}$	$\frac{378}{420}$

Nous avons écrit les dénominateurs décomposés en facteurs premiers au-dessous des fractions proposées. Le plus petit multiple commun étant $2^2.3.5.7 = 420$, nous l'avons divisé successivement par les dénominateurs des fractions, soit par la division ordinaire, soit en nous servant de la décomposition en facteurs premiers. Cela fait, nous avons écrit au-dessous de chaque fraction le quotient qu'a fourni son dénominateur; nous avons enfin multiplié chaque numérateur par le quotient correspondant, et donné à chaque produit, pour dénominateur, le multiple 420.

Est-il indispensable de réduire les fractions proposées à leurs plus simples expressions, avant de leur appliquer la partie de la règle qui consiste à employer le plus petit multiple commun comme dénominateur commun? Oui, si l'on veut opérer avec *certitude* d'avoir le plus petit dénominateur commun possible.

Pour le prouver, prenons des fractions irréductibles, comme les précédentes; par exemple,

$$\frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}.$$

Multiplions les deux termes de l'une des fractions par un facteur premier que nous savons être étranger à tous les dénominateurs proposés. Multiplions, par exemple, les deux termes de $\frac{3}{4}$ par 13, nous aurons la fraction égale $\frac{39}{52}$.

Supposons que l'on donne, *à priori*, pour les réduire au même dénominateur, les fractions

$$\frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{39}{52}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}.$$

Il est évident qu'en employant immédiatement, sans avoir réduit aucune fraction, le plus petit multiple commun des dénominateurs proposés, on aurait pour dénominateur commun $420 \times 13 = 5460$; tandis que, d'après ce que nous savons, il est possible d'avoir des fractions égales aux fractions données, ayant le dénominateur commun 420.

Il est aussi facile d'avoir des exemples où le plus petit multiple employé immédiatement est le plus petit dénominateur commun des fractions qui ne sont pas toutes irréductibles.

136. ***Pour comparer entre elles les grandeurs de plusieurs fractions données, il suffit de réduire ces fractions au même dénominateur.***

Ex. : $\frac{7}{12}, \frac{11}{18}$; le nombre 36 étant multiple de 12 et 18, nous le prenons pour dénominateur commun.

$$36 : 12 = 3; \ \frac{7}{12} = \frac{7 \times 3}{12 \times 3} = \frac{21}{36}$$

$$36 : 18 = 2; \ \frac{11}{18} = \frac{11 \times 2}{18 \times 2} = \frac{22}{36}$$

$\frac{11}{18} = \frac{22}{36}$ est plus grande que $\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$.

DES QUATRE OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS ET LES NOMBRES FRACTIONNAIRES.

ADDITION.

137. *Additionner plusieurs nombres donnés, c'est trouver un nombre qui se compose de toutes les unités ou parties d'unités qui composent les nombres donnés.*

Nous avons expliqué l'addition des nombres entiers.

ADDITION DES FRACTIONS.

138. *Additionner plusieurs fractions c'est réunir toutes leurs parties pour en composer une seule fraction qu'on appelle leur somme.*

On ne peut réunir en un seul nombre que des parties de même espèce ; il faut donc réduire les fractions données au même dénominateur ; alors leurs parties rassemblées seront évidemment en nombre égal à leurs numérateurs. De là cette règle :

RÈGLE. *Pour additionner des fractions données, on commence par les réduire au même dénominateur, puis on additionne les numérateurs et on donne à la somme pour dénominateur le dénominateur commun.*

Soit, par exemple, à additionner $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$.

Réduisons ces fractions au même dénominateur. 6 étant multiple de 3, nous chercherons le plus petit multiple de 6 et de 4 ; c'est 12. Ce dénominateur trouvé, pour plus de simplicité, on dispose ainsi l'addition :

		$\frac{12}{\;}$
4	$\frac{2}{3}$	8
2	$\frac{5}{6}$	10
3	$\frac{3}{4}$	9
		27 | 12
		3 | 2

La somme est $2 + \frac{1}{4}$.

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Nous avons divisé le multiple commun 12, successivement par tous les dénominateurs, et nous avons écrit à gauche de chaque fraction le quotient correspondant. Puis nous avons multiplié chaque numérateur par le quotient écrit à gauche, et posé le pro-

duit à la droite de la fraction ; ces produits sont les numérateurs des fractions égales aux proposées, et ayant le dénominateur 12. Ces numérateurs additionnés, comme la somme était plus grande que 12 douzièmes, nous avons extrait les entiers.

Remarque. *A la fin de toute opération qui a donné pour résultat définitif une expression fractionnaire, il convient d'extraire les entiers.*

139. Règle. *Pour additionner des nombres entiers accompagnés de fractions, on additionne d'abord les fractions d'après la règle précédente ; on extrait les entiers de cette première somme, si elle en contient, et on les ajoute aux entiers donnés, qu'on additionne ensuite :*

On peut prendre, par exemple, les nombres $17\frac{5}{6}$, $10\frac{2}{3}$, $7\frac{3}{4}$, dont la somme est $36+\frac{3}{12}=36+\frac{1}{4}$.

		12	quotients
17	$\frac{5}{6}$	10	2
10	$\frac{2}{3}$	8	4
7	$\frac{3}{4}$	9	3
$36+\frac{3}{12}$		27 | 12 ; 3 | 2	

SOUSTRACTION DES FRACTIONS ET DES NOMBRES FRACTIONNAIRES.

140. La Soustraction, *en général, a pour objet de retrancher d'un nombre donné toutes les unités et parties d'unités qui composent un autre nombre donné.*

Le résultat s'appelle *reste, excès* ou *différence.*

On dit encore : la soustraction est une opération par laquelle étant donnés la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, on trouve l'autre nombre.

Il résulte de ce qui a été dit pour l'addition, que l'on ne peut

immédiatement soustraire l'une de l'autre que des parties de même espèce, c'est-à-dire des fractions de même dénominateur. Voici donc la règle à suivre :

141. Règle. *Pour soustraire une fraction d'une autre, réduisez ces fractions au même dénominateur; retranchez le plus petit numérateur du plus grand, et donnez au reste, pour dénominateur, le dénominateur commun.*

Ex. : soustraire $\frac{5}{9}$ de $\frac{11}{12}$

		36
3	$\frac{11}{12}$	33
4	$\frac{5}{9}$	20
	Reste	13/36

142. *Si l'on doit soustraire un nombre fractionnaire d'un nombre fractionnaire, on retranche la fraction du plus petit nombre de celle du plus grand, et l'entier du premier de l'entier du second; les deux restes réunis forment le résultat demandé.*

Il peut arriver *que la fraction du plus petit nombre soit plus grande que la fraction du plus grand nombre. Alors on ajoute à cette fraction trop petite une unité réduite en partie de même espèce que celles des deux fractions; on opère alors la soustraction des deux fractions, devenue possible; mais en procédant à la soustraction des entiers, il faut, par compensation, augmenter l'entier du plus petit nombre d'une unité, puisque nous avons augmenté le plus grand nombre d'une unité.*

Ce cas comprend celui où le plus grand nombre serait entier.

1er Ex. :

19	3/4	9/12
8	2/3	8/12
11		1/12

2e ex. :

		81 (*)
31	2/7	18/63
17	7/9	49
13		32/63

3e ex. : 5/5

37	
13	3/5
23	2/5

(*) Le nombre 81 du deuxième exemple est le nombre des 63ièmes obtenus en ajoutant une unité à 18/63; on l'obtient aisément en additionnant les nombres voisins 18 et 63.

MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

143. ***Multiplier un nombre quelconque par une fraction, c'est composer un troisième nombre avec le nombre donné de la même manière que la fraction multiplicateur a été composée au moyen de l'unité.***

Ex. : $\frac{3}{5}$ étant composée de trois fois la cinquième partie de l'unité, le produit d'un nombre quelconque, 54, par $\frac{3}{5}$ se composera de trois fois la cinquième partie de 54; *multiplier un nombre 54 par la fraction $\frac{3}{5}$, ou prendre les $\frac{3}{5}$ de ce nombre, 54, c'est la même chose.*

On peut donner cette définition :

Multiplier un nombre par une fraction, c'est répéter un certain nombre de fois une partie aliquote déterminée de ce nombre.

144. Nous considérerons quatre cas de multiplication dans lesquels un facteur ou tous les deux sont des fractions ou des nombres fractionnaires.

1er CAS. *Multiplication d'une fraction par un nombre entier.*

Soit, pour exemple, à multiplier $\frac{7}{9}$ par 5.

Le produit doit se composer de cinq fois $\frac{7}{9}$. (Définition (21), le multiplicateur étant entier.) Le produit est donc égal à la somme $\frac{7}{9}+\frac{7}{9}+\frac{7}{9}+\frac{7}{9}+\frac{7}{9}=\frac{7\times 5}{9}$, d'après la règle d'addition.

RÈGLE. *On multiplie une fraction par un nombre entier, en multipliant le numérateur de la fraction par l'entier, et en donnant au produit pour dénominateur celui de la fraction.*

On peut simplifier quand le dénominateur de la fraction donnée est divisible par l'entier. D'après la règle précédente toujours applicable, en multipliant une fraction par un certain nombre entier, on rend la fraction ce nombre entier de fois plus grande. On parvient au même but en divisant le dénominateur donné par le nombre entier, quand la division peut se faire exactement.

Ex. : Le produit de $\frac{7}{8}$ par 4 est égal à $\frac{7}{2}$.

C'est d'ailleurs le résultat $\frac{7 \times 4}{8}$ simplifié.

2° CAS. *Multiplication d'un nombre entier par une fraction.*

Soit, par exemple, à multiplier 5 par $\frac{7}{9}$.

D'après notre définition, comme $\frac{7}{9}$ se compose de sept fois la neuvième partie de l'unité, le produit demandé se composera de sept fois la neuvième partie de 5. Cette neuvième partie de 5 est $\frac{5}{9}$ (115). Sept fois cette neuvième partie, ou le produit demandé, sera $\frac{5 \times 7}{9}$. Ainsi $5 \times \frac{7}{9} = \frac{5 \times 7}{9}$.

En comparant le résultat aux deux facteurs, on trouve cette règle :

RÈGLE. *Pour multiplier un entier par une fraction, on multiplie l'entier par le numérateur, et on donne au produit pour dénominateur celui de la fraction.*

REMARQUE : $\frac{7}{9} \times 5 = \frac{7 \times 5}{9}$; $5 \times \frac{7}{9} = \frac{5 \times 7}{9}$. Les produits sont des fractions égales ; donc $\frac{7}{9} \times 5 = 5 \times \frac{7}{9}$.

Dans les deux cas qui précèdent, *on peut donc intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit.*

On peut donc simplifier dans le deuxième cas, comme dans le premier, quand le dénominateur de la fraction est divisible par l'entier. On serait d'ailleurs conduit à cette simplification en suivant ce précepte général :

Il convient de réduire à sa plus simple expression le résultat d'une opération que l'on vient de faire sur des fractions. Nous rappellerons qu'*il faut toujours en même temps extraire les entiers, s'il y a lieu.*

3° CAS. *Multiplication d'une fraction par une fraction.*

RÈGLE. *Pour multiplier une fraction par une fraction, on multiplie les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux.*

Soit, par exemple, à multiplier $\frac{7}{8}$ par $\frac{3}{5}$.

Il faut composer un nombre avec $\frac{7}{8}$, de la même manière que $\frac{3}{5}$ est composée avec l'unité; or $\frac{3}{5}$ se compose de trois fois la cinquième partie de l'unité; donc le produit se composera de trois fois la cinquième partie de $\frac{7}{8}$. La cinquième partie de $\frac{7}{8}$ est un nombre cinq fois moindre que $\frac{7}{8}$; elle est donc égale à $\frac{7}{8 \times 5}$, d'après un principe démontré (122). Trois fois cette cinquième partie, ou le produit demandé égale $\frac{7}{8 \times 5} \times 3 = \frac{7 \times 3}{8 \times 5}$, d'après le premier cas.

En comparant ce produit aux deux facteurs, on trouve la règle ci-dessus.

145. REMARQUE : $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{8 \times 5}$; on aurait de même, $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \times 7}{5 \times 8}$. Mais $7 \times 3 = 3 \times 7$; $8 \times 5 = 5 \times 8$; donc $\frac{7 \times 3}{8 \times 5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 8}$, ou bien $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{8}$. De là ce principe :

Le produit de deux fractions ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs.

146. 4ᵉ CAS : *Multiplication de deux nombres fractionnaires.*

RÈGLE. *Pour multiplier deux nombres fractionnaires l'un par l'autre, réduisez chacun d'eux en une seule expression fractionnaire; puis multipliez les deux résultats l'un par l'autre, d'après la règle des fractions.*

Ex. : On propose de multiplier $3 + \frac{4}{5}$ par $5 + \frac{2}{3}$.

En raisonnant d'après la définition générale, on sera conduit à multiplier $3 + \frac{4}{5}$ par 5, puis $3 + \frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, pour ajouter les deux résultats. Chacune de ces multiplications se subdivise en deux autres; on aurait ainsi 4 produits partiels qu'il faudrait additionner

ensuite. On préfère ordinairement observer la règle énoncée. Le raisonnement est le même.

$$3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5};\ 5+\frac{2}{3}=\frac{17}{3};\ \frac{19}{5}\times\frac{17}{3}=\frac{19\times17}{5\times3}=\frac{323}{15}=21\ \frac{8}{15}.$$

Le produit de deux nombres fractionnaires ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs. C'est la même chose que pour deux fractions, puisque tout nombre fractionnaire peut s'écrire comme plus haut les nombres proposés, $\frac{19}{5}$, $\frac{17}{3}$.

Quand l'un des facteurs d'une multiplication étant un nombre fractionnaire, l'autre est entier, il est plus simple de multiplier successivement la fraction et l'entier du nombre fractionnaire par l'autre facteur entier.

$$\text{Ex. : } \left(3+\frac{4}{7}\right)\times5=3\times5+\frac{20}{7}=17+\frac{6}{7}.$$

On a soin d'extraire les entiers, s'il y a lieu, de la partie fractionnaire du produit, pour les ajouter aux entiers de l'autre partie.

147. Remarque. Le produit d'un *nombre quelconque* par une fraction proprement dite, c'est à-dire moindre que 1, est toujours *moindre que le multiplicande.*

Soit, par exemple, le produit de 54 par $\frac{3}{7}$. La fraction est composée de parties égales de l'unité, en nombre moindre qu'il n'en faut pour composer l'unité; le produit se composera donc de parties égales du multiplicande en nombre moindre qu'il n'en faut pour composer ce multiplicande; ce produit sera donc moindre que le multiplicande.

Le même raisonnement fait voir que le produit d'un nombre quelconque par une expression fractionnaire plus grande que 1, est plus grand que le multiplicande. Cette proposition est d'ailleurs évidente quand le multiplicateur est un nombre entier, ou un nombre entier plus une fraction. On peut réunir les deux énoncés en un seul.

148. On considère des produits de plus de deux facteurs entiers ou fractionnaires de la même manière qu'on a considéré des

produits de plus de deux nombres entiers. La définition est la même.

Soit, par exemple, à calculer, le produit $\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}\times\frac{8}{9}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}$.

$\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{5\times 2}{7\times 3}$; $\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}\times\frac{8}{9}=\frac{5\times 2\times 8}{7\times 3\times 9}$; etc.

Le produit de plusieurs fractions s'obtient en multipliant les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux.

149. Puissance des fractions. Une puissance de degré quelconque d'une fraction s'obtient en élevant chacun de ses termes à cette puissance.

$$\text{Ex. : } \left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{5^2}{7^2};\ \left(\frac{5}{7}\right)^3=\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{5^3}{7^3}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^4=\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{5^4}{7^4},\ \text{etc.}$$

La puissance m d'une fraction s'indique ainsi $\left(\frac{5}{7}\right)^m$.

150. Théorème. *Les puissances d'une fraction irréductible sont des fractions irréductibles.*

Ex. : $\frac{7}{9}$; $\left(\frac{7}{9}\right)^4=\frac{7^4}{9^4}$. Or 7 et 9 étant premiers entre eux, 7^4 et 9^4 sont aussi premiers entre eux (90).

151. *Le produit d'autant de fractions ou de nombres fractionnaires qu'on voudra ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

En effet, le changement de place dans l'ordre des facteurs fractionnaires, produit tout simplement, pour le produit, un changement de place correspondant dans les facteurs entiers du numérateur et dans ceux du dénominateur; ce qui ne change ni l'un ni l'autre de ces termes du produit.

Soit proposé de calculer les $\frac{5}{6}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{8}{9}$ de 24; les $\frac{8}{9}$ de $24=24\times\frac{8}{9}$; les $\frac{3}{4}$ des $\frac{8}{9}$ de $24=\left(24\times\frac{8}{9}\right)\times\frac{3}{4}$; enfin les $\frac{5}{6}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{8}{9}$ de 24 égalent $24\times\frac{8}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$. Nous avons à multi-

plier l'entier par le produit de toutes les fractions proposées. Ce que nous venons de faire s'appelle *prendre des fractions de fractions* d'un nombre donné.

Ce dernier nombre donné peut être aussi bien un nombre fractionnaire; on raisonnera absolument de même. On peut évidemment faire la multiplication des nombres proposés dans l'ordre de l'énoncé, ce qui donnerait

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times 24 = \frac{5 \times 3 \times 8 \times 24}{6 \times 4 \times 9}$$

On peut simplifier ce résultat.

DIVISION DES FRACTIONS.

152. *Diviser un nombre par un autre, c'est trouver un troisième nombre appelé quotient, tel que multiplié par le second nombre donné (le diviseur), il reproduise le premier (le dividende)* (35).

Nous considérerons quatre cas pour les divisions où il y a des fractions ou des nombres fractionnaires.

1er CAS. *Division d'une fraction par un nombre entier.*

RÈGLE. *Pour diviser une fraction par un entier, il suffit de multiplier le dénominateur par ce nombre entier, sans changer le numérateur.*

Soit, par exemple, $\frac{7}{8}$ à diviser par 5.

Le dividende $\frac{7}{8}$ étant égal au quotient multiplié par le diviseur 5, est cinq fois plus grand que le quotient; le quotient étant par suite un nombre cinq fois plus petit que le dividende $\frac{7}{8}$, on l'obtiendra d'après le principe (122), en multipliant le dénominateur seul de $\frac{7}{8}$, par 5; ce qui donne $\frac{7}{8 \times 5} = \frac{7}{40}$. D'où la règle énoncée.

Si le numérateur était divisible par l'entier, on aurait le quotient en divisant le numérateur par l'entier, sans toucher au dénominateur.

Ex. : $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$, puisque le quotient doit être un nombre quatre fois moindre que $\frac{8}{9}$.

2e CAS. *Division d'un nombre entier par une fraction.*

RÈGLE. *Pour diviser un nombre entier par une fraction, on multiplie l'entier par le dénominateur, et on divise le produit par le numérateur; ou bien, en moins de mots : on divise un entier par une fraction, en multipliant cet entier par la fraction renversée.*

Soit à diviser 14 par $\frac{8}{9}$.

Le quotient demandé multiplié par $\frac{8}{9}$ doit reproduire 14; autrement dit, les $\frac{8}{9}$ du quotient égalent 14; donc $\frac{1}{9}$ du quotient est égal à la huitième partie de 14, ou à $\frac{14}{8}$; et enfin les $\frac{9}{9}$ du quotient, ou le quotient lui-même, égalent $\frac{14 \times 9}{8}$.

En comparant ce résultat aux nombres donnés, on trouve la règle énoncée;

$$14 : \frac{8}{9} = 14 \times \frac{9}{8}.$$

3e CAS. *Division d'une fraction par une fraction.*

RÈGLE. *Pour diviser une fraction par une fraction, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Par exemple, diviser $\frac{5}{7}$ par $\frac{3}{4}$.

Le produit du quotient par $\frac{3}{4}$ doit être égal au dividende $\frac{5}{7}$; autrement dit, les $\frac{3}{4}$ du quotient égalent $\frac{5}{7}$; donc $\frac{1}{4}$ du quotient vaut trois fois moins que $\frac{5}{7}$ ou $\frac{5}{7 \times 3}$; donc le quotient lui-même égal à quatre fois son quart vaut $\frac{5}{7 \times 3} \times 4 = \frac{5 \times 4}{7 \times 3}$.

En écrivant ce résultat ainsi, $\frac{5}{7} \times \frac{4}{3}$, et le comparant aux fractions données, on trouve la règle énoncée.

Remarque. Le quotient d'un nombre quelconque par une fraction moindre que l'unité est toujours plus grand que le dividende. En effet, le dividende étant le produit du quotient par une fraction moindre que 1, est moindre que ce quotient; donc réciproquement, le quotient est plus grand que le dividende.

4e cas. *Division des nombres fractionnaires.*

Lorsque l'un des termes de la division ou tous les deux sont des nombres fractionnaires, il faut joindre dans chacun l'entier à la fraction, puis effectuer la division d'après les règles précédentes.

Ex. : 5 *à diviser par* $3 + \frac{4}{7}$. *On divisera* 5 *par* $\frac{25}{7}$.

Remarque générale.

153. Ce théorème fondamental : *Un produit ne change pas de valeur quand on intervertit arbitrairement l'ordre de ses facteurs, étant vrai pour les fractions et les nombres fractionnaires, comme pour les nombres entiers, toutes les conséquences de ce principe sont applicables aux fractions et aux nombres fractionnaires.*

Ainsi, on peut dire, en général, que :

1° *Pour multiplier ou diviser un nombre par le produit effectué de plusieurs facteurs, il suffit de multiplier ou diviser ce nombre par le premier facteur, le résultat obtenu par le second facteur, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les facteurs aient été employés.*

2° *Pour multiplier deux produits, il suffit de former un produit unique avec les facteurs du multiplicande et du multiplicateur* (48).

3° *Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut remplacer un nombre quelconque de facteurs par leur produit effectué* (49).

4° *Pour multiplier ou diviser un produit par un nombre, il suffit de multiplier ou diviser l'un des facteurs du produit par ce nombre* (47).

5° *Les théorèmes relatifs aux produits ou quotients de plusieurs puissances d'un même nombre sont vrais pour les puissances d'un nombre quelconque* (56).

6° *Quand on multiplie ou divise le dividende d'une division par un nombre quelconque, on multiplie ou divise le quotient par ce nombre.*

$$D = d \times 9;\ D \times m = d \times 9 \times m;\ \text{d'ou}\ \frac{D \times m}{d} = 9 \times m.$$

7° *Quand on multiplie ou divise le diviseur seul d'une division par un nombre, on divise ou on multiplie le quotient par ce nombre.*

$$D = d \times 9;\ D = d \times m \times \frac{9}{m};\ \text{d'où}\ \frac{D}{d \times m} = \frac{9}{m}.$$

8° *Quand on multiplie ou divise les deux termes d'une division par un même nombre quelconque, le quotient ne change pas* (52).

Remarquons bien qu'il s'agit dans les trois derniers énoncés du quotient complet, du nombre entier ou fractionnaire qui, multiplié par le diviseur, reproduit exactement le dividende, et non *de la partie entière* du quotient seulement.

On peut revenir sur les démonstrations de ces divers théorèmes, en remplaçant dans les égalités les nombres entiers par des nombres quelconques; ces égalités, encore vraies d'après le principe fondamental que nous avons rappelé (153), démontreront ces diverses propositions.

EXERCICES.

154. THÉORÈME. *La somme des numérateurs de plusieurs fractions égales entre elles, et la somme de leurs dénominateurs, forment, dans cet ordre, une fraction égale à chacune des fractions données.*

Ex. : $$\frac{15}{21} = \frac{35}{49} = \frac{25}{35} = \frac{55}{77}$$

On a $$\frac{15 + 35 + 25 + 55}{21 + 49 + 35 + 77} = \frac{15}{21}.$$

On a vu, n° 115, que le numérateur d'un fraction est le produit de cette fraction multipliée par son dénominateur, ($3 = \frac{3}{5} \times 5$). V. d'ailleurs la multiplication (144).

Cela posé, nous avons :

$$15 = \frac{15}{21} \times 21$$

$$35 = \frac{35}{49} \times 49 \quad \text{ou} \quad 35 = \frac{15}{21} \times 49$$

$$25 = \frac{25}{35} \times 35 \quad \text{ou} \quad 25 = \frac{15}{21} \times 35$$

$$55 = \frac{55}{77} \times 77 \quad \text{ou} \quad 55 = \frac{15}{21} \times 77.$$

D'où par addition,

$$15 + 35 + 25 + 55 = \frac{15}{21} \times (21 + 49 + 35 + 77).$$

Puis, en divisant, des deux parts, par $21 + 49 + 35 + 77$, on trouve

$$\frac{15 + 35 + 25 + 55}{21 + 49 + 35 + 77} = \frac{15}{21}.$$

Ce qu'il fallait prouver.

153. THÉORÈME : *La somme des numérateurs de plusieurs fractions données quelconques, et la somme de leurs dénominateurs forment, dans cet ordre, une fraction comprise entre la plus petite et la plus grande des fractions données.*

Ex. : Soient données les fractions

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{7}{8},$$

on aura 1° $$\frac{2+3+4+7}{3+4+5+8} > \frac{2}{3}$$

et 2° $$\frac{2+3+4+7}{3+4+5+8} < \frac{7}{8}.$$

En effet, 1°

$$2 = \frac{2}{3} \times 3.$$

$$3 = \frac{3}{4} \times 4; \quad \text{d'où} \quad 3 > \frac{2}{3} \times 4, \quad \text{à cause de} \quad \frac{3}{4} > \frac{2}{3};$$

$4 = \frac{4}{5} \times 5;$ d'où $4 > \frac{2}{3} \times 5;$ à cause de $\frac{4}{5} > \frac{2}{3};$

$7 = \frac{7}{8} \times 8;$ d'où $7 > \frac{2}{3} \times 8,$ $\qquad \frac{7}{8} > \frac{2}{3};$

d'où, par addition, $2+3+4+7 > \frac{2}{3} \times (3+4+5+8);$

d'où, en divisant de part et d'autre par $3+4+5+8$,

$$\frac{2+3+4+7}{3+4+5+8} > \frac{2}{3}.$$

De même, 2°

$$7 = \frac{7}{8} \times 8.$$

$2 = \frac{2}{3} \times 3;$ d'où $2 < \frac{7}{8} \times 3;$ à cause de $\frac{2}{3} < \frac{7}{8};$

$3 = \frac{3}{4} \times 4;$ d'où $3 < \frac{7}{8} \times 4;$ $\qquad \frac{3}{4} < \frac{7}{8};$

$4 = \frac{4}{5} \times 5;$ d'où $4 < \frac{7}{8} \times 5,$ $\qquad \frac{4}{5} < \frac{7}{8};$

d'où, par addition, $7+2+3+4 < \frac{7}{8}(8+3+4+5);$

d'où
$$\frac{7+2+3+4}{8+3+4+5} < \frac{7}{8}.$$

Le théorème est donc démontré (*).

156. COROLLAIRE. *Si on ajoute le même nombre aux deux termes d'une fraction, celle-ci augmente si elle est plus petite que l'unité, et diminue si elle est moindre que* 1:

1° Ex. : $\frac{5}{9} < 1$. Ajoutons 3 aux deux termes,

il vient $\frac{5+3}{9+3}$ ou $\frac{8}{12} > \frac{5}{9}$.

(*) Les deux théorèmes (154) et (155), ont des applications extrêmement utiles. Le 1er est dans le programme.

En effet, $\frac{5}{9} < \frac{3}{3}$, donne $\frac{5+3}{9+3} > \frac{5}{9}$. (Théor. précéd.; 1°)

2° Ex. : $\frac{9}{5} > 1$. Ajoutons 3 aux deux termes,

il vient $\frac{9+3}{5+3}$ ou $\frac{12}{8} < \frac{9}{5}$.

En effet, $\frac{9}{5} > \frac{3}{3}$, donne $\frac{9+3}{5+3} < \frac{9}{5}$. (Théor. précéd., 2°)

157. Remarque. Soit m un nombre entier indéterminé;

on a
$$\frac{5}{9} < \frac{5+m}{9+m}.$$

Si on remplace successivement m par les nombres entiers 1, 2, 3, 4..., on obtient une suite de fractions de plus en plus grandes; néanmoins, ces fractions sont toutes plus petites que 1; car, quel que soit m, on a $5+m < 9+m$. La différence de la fraction considérée avec l'unité est évidemment $\frac{4}{9+m}$; cette différence diminue quand m augmente, et peut devenir moindre que tout nombre donné, si petit qu'il soit.

Les fractions $\frac{5}{9}, \frac{6}{10}, \frac{7}{11}, \frac{8}{12}, \ldots$ s'approchent donc indéfiniment de l'unité sans pouvoir l'atteindre; mais si on continue suffisamment loin, on peut avoir une fraction qui diffère de l'unité d'aussi peu que l'on voudra. L'unité est appelée *la limite supérieure* des fractions de cette suite continuée indéfiniment.

158. Théorèmes *à démontrer. Les fractions* $\frac{543}{687}, \frac{543543}{687687}, \frac{543543543}{687687687}$, etc., sont égales.

Il en est de même des fractions $\frac{5}{387}, \frac{5005}{387387}, \frac{5005005}{387387387}$, etc.

Les seuls nombres dont on puisse augmenter ou diminuer les termes d'une fraction donnée sans en changer la valeur sont les termes d'une fraction égale à la fraction donnée.

Ces deux propositions résultent presque immédiatement des théorèmes que nous venons de démontrer.

Problèmes résolus.

159. *Une femme avait une certaine quantité d'œufs; sans en casser un seul, elle vend le tiers de cette quantité, plus les 2/3 d'un œuf; elle en donne le 6ième plus 3 œufs $\frac{1}{3}$. Elle en mange le quart, et il lui reste la 7ième partie, plus 6 œufs $\frac{5}{7}$. Combien en avait-elle?*

Nous additionnerons, d'une part, les fractions de son avoir primitif en œufs, dont elle a disposé de diverses manières, savoir $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}$; de l'autre, tous les œufs et fractions d'œufs qui complètent cet avoir,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{28}{84}+\frac{14}{84}+\frac{21}{84}+\frac{12}{84}=\frac{75}{84}.$$

En second lieu $\frac{2}{3}+3+\frac{1}{3}+6+\frac{5}{7}=6+\frac{3}{3}+3+\frac{5}{7}=10+\frac{5}{7}$.

Ainsi, son avoir primitif en œufs est égal aux 75/84 de ce même avoir, plus $10^{\text{œ}}\,\frac{5}{7}$. On peut donc dire les $\frac{84}{84}$ de son avoir primitif, moins les 75/84 du même nombre, égalent 10 5/7; donc 10 + 5/7 égalent juste les $\frac{9}{84}$ ou les $\frac{3}{28}$ de cet avoir; $10+5/7=\frac{75}{7}$; 3/28 de l'avoir égalant $\frac{75}{7}$, 1/28 de cet avoir $=75/7 : 3=25/7$. Et les 28 vingt-huitièmes, ou l'avoir entier, égalant $25/7\times 28=25\times 4=100$. Elle avait donc 100 œufs. C'est ce qu'on fera bien de vérifier; ce sera un exercice de plus.

PROBLÈME. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, *et* $\frac{1}{6}$ *de l'âge d'une personne, plus* 4 *ans et* 1 *jour, font juste l'âge qu'elle aura dans* 1an 11mois 15jours. *Quel âge a-t-elle?*

Ajoutons d'abord les fractions de l'âge demandé: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{6}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$.

$\frac{11}{12}$ de l'âge de cette personne, plus 4 ans 1 jour, font cet âge même, ou $\frac{12}{12}$ de cet âge, plus 1 an 11 mois 15 jours. Donc 4 ans 1 jour égalent $\frac{1}{12}$ de l'âge, plus 1 an 11 mois 15 jours; $\frac{1}{12}$ de l'âge = 4 ans 1 jour, moins 1 an 11 mois 15 jours.

Pour faire la soustraction, nous écrivons 1^{an} 1^{jour} = 3^{ans} 11^{mois} 30^{jours};
Soustrayant 1 an 11 mois 15 jours; on trouve pour reste 2 ans 15 jours;

$\frac{1}{12}$ de l'âge = 2 ans 15 jours; l'âge = (2^{ans} 15^{jours}) $\times$ 12 = 24^{ans} + 180^{jours}.

Problème. *Un bassin se remplit d'eau au moyen de 3 robinets, et peut se vider au moyen d'un quatrième. Le 1er remplirait seul le bassin en 3h 2/5; le 2e en 2h 3/4; le 3e en 4h 1/2;* le *4e le viderait en 3h 3/5; on les ouvre tous quatre; au bout de combien de temps le bassin se trouvera-t-il rempli?*

On cherche quelle fraction de la capacité se trouve remplie une heure après qu'on a eu ouvert les quatre robinets à la fois.

Le premier remplirait seul le bassin en 3h 2/5, ou $\frac{17}{5}$ d'heure. Dans $\frac{1}{5}$ d'heure il remplit $\frac{1}{17}$ du bassin. Dans une heure, il en remplit $\frac{5}{17}$.

Le deuxième, qui remplit le bassin tout entier en 2h 3/4, ou $\frac{11^h}{4}$, en remplirait $\frac{1}{11}$ dans $\frac{1}{4}$ d'heure, et $\frac{4}{11}$ au bout d'une heure.

On trouve de même que le troisième robinet remplit les $\frac{2}{9}$ du bassin dans 1 heure, et le quatrième en vide $\frac{5}{18}$ dans 1 heure.

Au bout d'une heure, il y a donc dans le bassin un volume d'eau égal à $\frac{5}{17}+\frac{4}{11}+\frac{2}{9}-\frac{5}{18}$ de sa capacité. Évaluons cette quantité. Le dénominateur commun est $17\times 11\times 18 = 3366$. Les numérateurs sont dans l'ordre ci-dessus des fractions, 990, 1224, 748, 935. Addition et soustraction effectuées, on trouve le reste $\frac{2027}{3366}$. Les $\frac{2027}{3366}$ du bassin sont remplis après la première heure; il s'en remplit $\frac{1}{3366}$ dans $\frac{1}{2027}$ d'heure. Le bassin tout entier = $\frac{3366}{3366}$ de ce bassin, sera donc rempli au bout de $\frac{3366}{2027}$ d'heure, c'est-à-dire au bout de 1h $\frac{1339}{2027}$.

Problèmes à résoudre.

Un père disait à son fils : s'il y avait dans cette bourse $\frac{1}{3}$, plus $\frac{3}{4}$, plus $\frac{5}{6}$, plus $\frac{7}{8}$ du quadruple de ce qu'il y a, et 32 francs en plus, il y aurait 300 fr. Trouve la somme qu'elle contient; et je te la donne. *Rép.* 24 fr.

Problème. Un capitaine rentre au dépôt de son régiment avec 27 hommes de sa compagnie; on demande combien il avait d'hommes en entrant en campa-

gné, sachant que $\frac{1}{4}$ de son monde a été tué, $\frac{1}{8}$ fait prisonnier; $\frac{1}{6}$ laissé à l'hôpital, et $\frac{1}{12}$ mort de maladie? *Rép.* 72 hommes.

Problème. Quelqu'un qui a acheté une propriété a payé à compte les 2/3 des 3/4 des $\frac{8}{9}$ du prix, et il redoit encore 60635 fr.; combien cette propriété lui a-t-elle coûté? *Rép.* 109143 fr.

Problème. Deux fontaines coulent dans le même bassin; la 1re le remplit en 2 heures, la 2e en 3, et l'eau du bassin s'écoule par un robinet, qui le vide en une heure et demie.

Le bassin étant vide et les 3 robinets coulant ensemble, en combien de temps serait-il plein? *Rép.* 6 heures.

Problème. Un marchand a vendu pour 628 fr. de marchandises; s'il les eût vendues 72 fr. de plus, il eût gagné une somme égale au $\frac{1}{3}$ de son déboursé; combien lui coûtaient ses marchandises? *Rép.* 525 fr.

Problème. En passant de la température 0° à 100°, une barre de fer doux forgé s'allonge de $\frac{1}{819}$ de sa longueur primitive; quelle sera à 100° la longueur d'une barre de fer qui à 0° est longue de 4 mètres 3/5? *Rép.* 4m 2480/4095.

APPENDICE A LA THÉORIE DES FRACTIONS.

PREMIÈRES NOTIONS SUR L'ÉVALUATION DES GRANDEURS ET DES NOMBRES PAR APPROXIMATION.

160. Évaluer un nombre ou une grandeur *à moins d'une unité*, c'est trouver le plus grand nombre d'unités contenues dans ce nombre ou dans cette grandeur. Ex. : Si on veut évaluer une longueur à moins d'un mètre, on portera le mètre sur cette longueur, à partir d'une extrémité, jusqu'à ce qu'on arrive exactement à l'autre extrémité, ou à une distance de cette extrémité moindre que le mètre. Si la longueur est plus grande que 15 mètres et moindre que 16 mètres, on dit que 15 mètres est sa valeur par défaut, ou 16 mètres sa valeur par excès, à moins d'un mètre.

161. En général, évaluer un nombre ou une grandeur à moins de $\frac{1}{n}$, c'est trouver le plus grand nombre de fois que ce nombre ou cette grandeur contient la $n^{ième}$ partie de l'unité; si une gran-

deur est comprise entre m fois la $n^{ième}$ partie de l'unité, et $m+1$ fois cette $n^{ième}$ partie, on dit que le nombre $\frac{m}{n}$ exprime cette grandeur à moins de $\frac{1}{n}$ par défaut, ou $\frac{m+1}{n}$ à moins de $\frac{1}{n}$ par excès.

S'il s'agit d'un nombre évalué ainsi, on dit que $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ sont des valeurs de ce nombre approchées à moins de $\frac{1}{n}$, l'une par défaut, l'autre par excès.

162. Quand on a besoin de la valeur d'un nombre fractionnaire, et en général d'un nombre qui n'est pas entier à moins d'une unité, il suffit évidemment de chercher le plus grand nombre entier contenu dans ce nombre, et de remplacer le nombre proposé par ce nombre entier, en laissant de côté la partie complémentaire moindre que 1.

Ex. : Évaluer $\frac{547}{19}$ à moins d'une unité.

$$\frac{547}{19}=29+\frac{15}{19}.$$

Le nombre 29 répond à la question.

163. Règle. *Pour évaluer un nombre quelconque* A *à moins de* $\frac{1}{n}$, *on multiplie ce nombre par le dénominateur* n; *on évalue ensuite à moins d'une unité le produit obtenu* $A \times n$; *soit* a *le nombre entier ainsi trouvé; on divise ce nombre* a *par* n, *et* $\frac{a}{n}$ *est la valeur cherchée du nombre proposé à moins de* $\frac{1}{n}$.

$\frac{a}{n}$ est la valeur approchée par défaut, $\frac{a+1}{n}$ serait la valeur approchée par excès.

En effet, on se propose par cette question de trouver le plus grand nombre de fois x que la fraction $\frac{1}{n}$ est contenue dans A. On doit avoir :

$$\frac{x}{n} < A < \frac{x+1}{n}.$$

Multipliant tous ces nombres par n, on trouve :

$$x < A \times n < x + 1.$$

On voit donc que x est le plus grand nombre d'unités contenues dans $A \times n$; c'est la valeur de $A \times n$ prise à moins d'une unité; d'ailleurs, comme $\frac{x}{n}$ est la valeur du nombre A à moins de $\frac{1}{n}$, la règle ci-dessus est démontrée.

Cette démonstration est vraie, quelle que soit la nature de A, nombre ou grandeur quelconque.

Appliquons à un nombre fractionnaire. Trouver la valeur de $\frac{367}{423}$ à moins de $\frac{1}{12}$; autrement dit, convertir $\frac{367}{423}$ en 12ièmes à moins de $\frac{1}{12}$.

Appliquant la règle, nous multiplierons le numérateur 367 par 12, ce qui nous donnera $\frac{367 \times 12}{423}$; puis, pour extraire l'entier, nous diviserons 367×12 par 423, ce qui donne le nombre 10. Divisant 10 par 12, nous avons $\frac{10}{12}$ pour la valeur de $\frac{367}{423}$ à moins de $\frac{1}{12}$ ou à $\frac{1}{12}$ près. Dans une question de ce genre, on peut toujours vérifier comme il suit :

De la division de 367×12 par 423, il résulte

$$10 < \frac{367 \times 12}{423} < 11.$$

Par suite $$\frac{10}{12} < \frac{367}{423} < \frac{11}{12}.$$

On remplace ainsi une fraction de dénominateur très-grand, et dont on se fait difficilement une idée précise, par une fraction, plus facile à apprécier, qui donne une approximation suffisante.

164. Si on demande à moins de $\frac{1}{12}$ près le quotient d'une divi-

sion dont le dividende est plus grand que le diviseur, on fera bien de chercher la partie entière du quotient par la règle ordinaire, et sans modifier le dividende. Il restera ensuite à évaluer le quotient du reste par le diviseur; c'est ce quotient $\frac{r}{d}$ qu'on évalue à moins de $\frac{1}{12}$.

On multiplie donc le reste, r, par le dénominateur 12; on divise le produit par le diviseur, d, et le quotient entier de cette division est le numérateur d'une fraction ayant le dénominateur 12, laquelle s'ajoute à la partie entière du quotient cherché, à la place de la fraction $\frac{r}{d}$.

Ex. : Trouver le quotient de 7278 par 183 à $\frac{1}{10}$ près.

$$\begin{array}{r|l} 7278 & 183 \\ \cline{2-2} 1788 & 39+\frac{7}{10} \\ 141 & \\ 10 & \\ \hline 1410 & \\ 129 & \end{array}$$

Le quotient de 7278 par 183 est 39, plus une fraction $\frac{141}{183}$ que nous avons évaluée à moins de $\frac{1}{10}$, ce qui donne $39\frac{7}{10}$.

CHAPITRE II.

DES FRACTIONS DÉCIMALES.

165 La simplicité du calcul des nombres entiers est due à cette loi fondamentale : *Les unités représentées par les différents chiffres d'un nombre, lu de gauche à droite, sont de dix en dix fois plus petites les unes que les autres.* On parvient à rendre le calcul des fractions aussi simple que celui des nombres entiers, en étendant, sans interruption, au delà de l'unité, cette loi de décroissement.

166. *On considère exclusivement des parties de l'unité dix fois moindres que celle-ci, et, à partir de là inclusivement, des parties de l'unité de dix en dix fois plus petites les unes que les autres;* ces parties sont celles qu'on a nommées *les parties décimales* de l'unité.

Les parties décimales de l'unité sont les *dixièmes*, les *centièmes*, les *millièmes*, et en général les parties d'unité dont l'une peut s'écrire ainsi : $\frac{1}{10^n}$.

Les parties décimales prennent le nom d'*unités décimales* de divers ordres; les *dixièmes* sont les unités décimales *du* 1er *ordre*; les *centièmes* celles *du* 2e *ordre*, etc...

Un nombre décimal est un nombre composé de parties décimales, ou d'un nombre entier accompagné de parties décimales.

Ex. : 367 millièmes; 49 unités, 59 centièmes.

On appelle aussi *fraction décimale* un assemblage quelconque de parties décimales.

Ex. : 367 millièmes.

Par comparaison avec les fractions ordinaires, on peut dire : *Une fraction décimale est une fraction qui a pour dénominateur*

l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, autrement dit, *une puissance de* 10.

Ex. : $\frac{367}{1000}$.

167. *Dix unités d'un ordre décimal quelconque en composent une de l'ordre immédiatement supérieur.* Il résulte de là que tout nombre décimal est la somme de plusieurs parties dont chacune se compose d'un certain nombre d'unités d'un certain ordre, en nombre moindre que dix (3).

$$\text{Ex.}: \frac{367}{1000} = \frac{36}{100} + \frac{7}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000}.$$

Eu égard à cette composition des nombres décimaux, et à la loi *continue* de décroissement des unités entières et décimales, on a pu facilement étendre aux nombres décimaux les conventions de la numération écrite ; voici, à leur sujet, le complément de cette numération.

MANIÈRE D'ÉCRIRE LES NOMBRES DÉCIMAUX.

168. *Pour écrire un nombre décimal, on écrit d'abord le nombre entier qu'il contient ; puis à la droite de ce nombre entier, une virgule ; à la droite de cette virgule, un chiffre représentant le nombre des dixièmes ; puis le chiffre des centièmes, puis le chiffre des millièmes, et ainsi de suite, de gauche à droite, et par ordre, jusqu'aux plus petites unités décimales. Lorsqu'il n'y a pas d'unités entières, on met un zéro pour en tenir la place ; à la droite de ce zéro, la virgule ; puis les unités décimales comme il vient d'être dit.*

S'il manque des unités décimales, d'un ordre quelconque, supérieures aux plus petites, on fait tenir la place de chaque ordre manquant par un zéro, de manière à donner aux autres chiffres la place qui convient à leur valeur.

Ex. : $57 + \frac{476}{1000} = 57 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{6}{1000}$ (*). On écrit 57,476.

(*) $\frac{476}{1000} = \frac{400}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{6}{1000} = \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{6}{1000}$, de même pour les fractions décimales suivantes.

$\frac{484}{1000}=\frac{4}{10}+\frac{8}{100}+\frac{4}{1000}$. Écrivez 0,484. Soit encore $57+\frac{58}{10000}=57+\frac{5}{1000}+\frac{8}{10000}$. Il n'y a ni dixièmes ni centièmes. Écrivez 57,0058.

Il y a trois manières de lire un nombre décimal écrit ou d'énoncer un nombre décimal que l'on a dans l'idée.

1re MANIÈRE. *On énonce l'entier d'abord, puis successivement, et dans l'ordre décroissant, les dixièmes, les centièmes, les millièmes, etc. Ex. :* 467 *unités*, 4 *dixièmes*, 7 *centièmes*, 6 *millièmes.*

Pour écrire un nombre décimal dicté de cette manière, on suit littéralement la règle précédente ; 467, 476.

2e MANIÈRE (c'est la plus usitée). *On énonce l'entier d'abord, puis l'ensemble des parties décimales, comme une seule fraction ordinaire composée de parties de la plus petite espèce décimale.*

Ex. : 467 unités, 476 millièmes.

Pour écrire un nombre décimal ainsi dicté, *on écrit d'abord l'entier; à droite, une virgule; puis, à droite de la virgule, le nombre des unités décimales, comme un nombre entier ordinaire;* 467, 476. Mais il faut avoir égard à la remarque suivante : *Il est indispensable que le dernier chiffre du nombre écrit à droite de la virgule, occupe la place qui convient aux unités décimales de l'espèce énoncée; si le nombre n'avait pas assez de chiffres pour cela, on placerait entre lui et la virgule un nombre suffisant de zéros.* Ex. : 67 unités, 56 dix millièmes; 57,0056.

3e MANIÈRE. *On énonce tout le nombre décimal comme un seul nombre fractionnaire composé de parties décimales de la plus petite espèce.* Ex. : 467476 millièmes.

Pour écrire un nombre dicté de cette manière, *on écrit le nombre énoncé comme un nombre entier; puis on sépare sur la droite, par une virgule, assez de chiffres pour que le dernier, à droite, occupe la place des unités décimales nommées.* Ainsi, dans l'exemple cité, on écrira d'abord 467476; puis avec une virgule, 467,476.

Si le nombre entier écrit d'abord n'avait pas autant de chiffres qu'il en faut séparer d'après cette règle, on compléterait par un ou plusieurs zéros écrits à gauche de ce nombre entier ; on pla-

cerait une virgule à gauche de ces zéros; puis à la gauche de la virgule, un zéro pour tenir la place des unités entières. Ex. : 78 dix-millièmes, écrivez 0,0078.

La lecture de l'égalité suivante résume et démontre tout ce que nous venons de dire.

$$467,476 = 467 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{6}{1000} = 467 + \frac{476}{1000} = \frac{467476}{1000}.$$

De ces égalités on conclut encore la règle suivante :

169. *Pour passer de l'écriture abrégée d'un nombre décimal à la forme d'un nombre fractionnaire ordinaire, on supprime la virgule, puis on donne au nombre résultant pour dénominateur l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres après la virgule dans le nombre décimal donné.*

170. On considère deux valeurs pour un chiffre d'un nombre décimal, sa *valeur absolue* et sa *valeur relative*. Ces dénominations ont exactement le même sens que pour les chiffres d'un nombre entier. La valeur relative d'un chiffre dans un nombre décimal dépend uniquement du rang qu'il occupe à gauche ou à droite de la virgule. On peut déduire de là diverses conséquences.

171. *En déplaçant la virgule pour la porter vers la droite ou vers la gauche, dans un nombre décimal, on multiplie ou on divise le nombre proposé par l'unité suivie d'autant de zéros qu'on a fait parcourir de rangs à la virgule.*

Soit par exemple 5481,368. En avançant la virgule de deux rangs vers la droite, nous obtiendrons le nombre 548136,8, cent fois plus grand que 5481,368. En la reculant de trois rangs, nous aurons le nombre 5,481368, mille fois plus petit que le nombre donné 5481,368. Par le premier changement, chaque chiffre de 5481,368 a acquis une valeur relative cent fois plus grande; c'est ce qu'il est facile de vérifier en comparant 5481,368 et 548136,8, chiffre à chiffre, de droite à gauche

Remarque analogue pour le deuxième changement.

172. *Un nombre décimal ne change pas quand on ajoute ou supprime sur sa droite un nombre quelconque de zéros.*

Ex. : 19,237 = 19,23700.

En effet, dans le deuxième nombre, chaque chiffre ayant par rapport à la virgule le même rang que dans le premier, a conservé la même valeur relative. Le 7, par exemple, qui exprimait des

millièmes dans le premier nombre, exprime aussi des millièmes dans le deuxième. Le nombre est donc toujours la somme des mêmes valeurs relatives : il n'a donc pas changé.

173. Cette propriété sert à *compléter les décimales* entre plusieurs nombres, c'est-à dire à faire en sorte, sans altérer les nombres donnés, qu'ils aient tous le même nombre de chiffres décimaux. Il suffit, pour cela, d'ajouter des zéros, en nombre suffisant, à la droite des nombres, de manière qu'ils aient tous autant de décimales que celui qui en a primitivement le plus. Cette opération est l'équivalent de la réduction des fractions au même dénominateur. Ex. : 34,76 et 351,7856. Nous pourrons écrire 34,7600 et 351,7856. On avait primitivement $\frac{3476}{100}$ et $\frac{3517856}{10000}$; on met à la place, $\frac{347600}{10000}$ et $\frac{3517856}{10000}$.

174. Remarque générale. *Tout ce qui a été dit et démontré au sujet des fractions ordinaires, ou des nombres fractionnaires, s'applique exactement aux nombres décimaux.* Nous pourrons donc tirer de la théorie des fractions ordinaires tout le parti que nous jugerons convenable.

ADDITION DES NOMBRES DÉCIMAUX.

175. Règle. *Pour additionner des nombres décimaux, on les écrit les uns sous les autres, de manière que les unités de même ordre se correspondent dans une même colonne verticale; on fait ensuite l'addition comme celle des nombres entiers sans avoir égard à la virgule; seulement, on met dans la somme une virgule, sous les virgules des nombres; ou, ce qui est la même chose, on sépare sur la droite de cette somme, par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans celui des nombres additionnés qui en a le plus.*

$$\begin{array}{r} 367,48 \\ 53,769 \\ 419,7 \\ 834,584 \\ \hline 1675,533 \end{array}$$

Démonstration. On peut remarquer qu'en supposant les nombres décimaux complétés par des zéros, il n'y aurait rien de changé dans l'addition précédente ; dès lors, en suivant la règle, on additionne les numérateurs de plusieurs expressions fractionnaires réduites au même dénominateur, et on donne à la somme, au moyen de la virgule, ce dénominateur commun.

On explique encore l'addition précédente comme on a expliqué celle des nombres entiers, en ayant égard à ce que dix unités d'un ordre quelconque composent une dizaine d'unités de l'ordre immédiatement supérieur.

SOUSTRACTION.

176. Règle. *On écrit le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent; on opère ensuite la soustraction, sans avoir égard à la virgule, comme celle de deux nombres entiers. Le résultat trouvé, on y place une virgule sous les virgules des nombres.*

Il sera quelquefois commode de compléter les décimales dans les deux termes de la soustraction, surtout quand ce sera le plus grand nombre qui en aura le moins.

Ex. :		
	3476,384	478,3500
	2538,492	236,2874
	937,892	242,0626

Démonstration. On peut, comme dans l'addition, s'appuyer sur la règle de soustraction des fractions ordinaires, ou bien expliquer cette soustraction comme celle des nombres entiers.

MULTIPLICATION.

177. Règle. *On multiplie les deux nombres proposés sans avoir égard à la virgule, comme deux nombres entiers, puis on sépare sur la droite du produit autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs à la fois.*

$$\begin{array}{r} 34{,}67 \\ 53{,}8 \\ \hline 27736 \\ 10401 \\ 17335 \\ \hline 1865{,}246 \end{array}$$

Cette règle se trouve, ou se démontre facilement, en écrivant les facteurs sous forme fractionnaire :

$$34{,}67 \times 53{,}8 = \frac{3467}{100} \times \frac{538}{10} = \frac{3467 \times 538}{1000}.$$

La comparaison du dernier produit aux deux nombres décimaux donnés démontre la règle. Car la division du produit 3467 × 538 par 1000 se fait en séparant sur la droite de ce produit trois chiffres décimaux, autant qu'il y en a dans les deux facteurs à la fois.

Il peut arriver que le nombre entier obtenu d'abord comme produit, ne contienne pas autant de chiffres que la règle prescrit de séparer de chiffres décimaux sur la droite. Alors on met à gauche de ce produit un nombre suffisant de zéros, pour qu'on puisse séparer le nombre voulu de décimales; à gauche du dernier zéro, une virgule, et à gauche de la virgule, un zéro pour remplacer les entiers qui manquent.

Ex. : $0{,}47 \times 0{,}02 = 0{,}0094.\quad \frac{47}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{94}{10000}.$

DIVISION.

178. *Si le dividende et le diviseur ont le même nombre de décimales, on supprime la virgule dans les deux; on fait la division des deux nombres entiers résultant, et le quotient que l'on obtient est, sans aucun changement, celui des deux nombres décimaux proposés.*

En effet, par la suppression de la virgule, on n'a fait que multiplier les deux termes de la division par un même nombre, ce qui n'altère pas le quotient (153, 8°).

Si le nombre des chiffres décimaux n'est pas le même dans le dividende et dans le diviseur, on complète les décimales; ce qui ne change pas ces deux termes; puis, on opère comme dans le cas précédent auquel on est ramené.

1er Ex. : 534,28 à diviser par 12,49.

On divisera 53428 par 1249. Le quotient est le même que celui des deux nombres donnés.

On peut démontrer de cette manière :

$$534{,}28 : 12{,}49 = \frac{53428}{100} : \frac{1249}{100} = \frac{53428 \times 100}{100 \times 1249} = \frac{53428}{1249}.$$

2e Ex. : 534, 2876 à diviser par 12, 49.

On écrira 12,4900, puis on divisera 5342876 par 124900.

REMARQUE. Si le quotient cherché doit renfermer des décimales, on fait bien, dans le cas spécial où *le dividende* contient plus de chiffres décimaux que le diviseur, de ne pas compléter les décimales avant de supprimer la virgule. On supprime alors la virgule sans ajouter aucun zéro à droite du diviseur; mais, le quotient trouvé, on sépare autant de chiffres décimaux sur la droite qu'il y en a de plus dans le dividende que dans le diviseur. Le reste final exprimera alors des unités décimales de même ordre que le quotient ainsi trouvé. L'explication de cette règle est facile (*).

CONVERSION D'UNE FRACTION ORDINAIRE EN FRACTION DÉCIMALE (**).

179. Nous venons de voir que les opérations sur les nombres décimaux s'exécutent absolument de la même manière que les opérations sur les nombres entiers, tandis que le calcul des frac-

(*) Les exercices sur les quatre opérations qui précèdent se trouvent après l'exposition du système métrique. Pour prendre nos exemples dans les applications les plus ordinaires, il nous faut connaître les unités en usage.

(**) *Évaluer un produit ou un quotient à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.*

Telle est la question qui vient ici dans le programme.

La conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale est un premier exemple très-simple d'une pareille évaluation. C'est pourquoi nous commençons par cette conversion pour revenir ensuite à la question générale, (V. page 132.)

tions ordinaires est loin d'être aussi simple. Aussi dans la pratique emploie-t-on à peu près exclusivement les nombres décimaux, et quand il se présente des fractions ordinaires, on les convertit en fractions décimales, soit exactement, soit approximativement; car toutes les fractions ordinaires ne sont pas susceptibles d'être exactement converties en décimales. Il y a pour cela une condition que nous allons d'abord faire connaître :

180. THÉORÈME I. *Pour qu'une fraction ordinaire irréductible puisse être exactement convertie en fraction décimale, il faut et il suffit que son dénominateur ne renferme aucun facteur premier différent de* 2 *ou de* 5.

Cette condition est nécessaire. En effet, supposons qu'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ puisse être exactement convertie en fraction décimale; cela veut dire qu'il existe une fraction décimale, $\frac{c}{10^n}$, exactement égale à $\frac{a}{b}$; nous devons avoir l'égalité

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{10^n}$$

Multipliant de part et d'autre par 10^n, il vient

$$\frac{a\times 10^n}{b}=c.$$

c étant un nombre entier, il résulte de cette égalité que $a\times 10^n$ doit être divisible par b; mais b est premier avec a, puisque $\frac{a}{b}$ est irréductible; donc b doit diviser 10^n (87). Tous les facteurs de b doivent exister dans 10^n (96); mais dans $10^n=10\times 10\times 10\ldots$, il n'entre que les facteurs premiers 2 et 5 de 10; donc b ne doit renfermer aucun facteur premier différent de 2 et de 5.

Cette condition est suffisante. En effet, supposons que $b=2^p\times 5$; qu'il s'agisse, par exemple, de la fraction $\frac{19}{40}=\frac{19}{2^3\times 5}$. Nous aurons :

$$\frac{19}{40}=\frac{19}{2^3\times 5}=\frac{19\times 5^2}{2^3\times 5^3}=\frac{19\times 25}{(2\times 5)^3}=\frac{475}{1000}$$

$\frac{19}{40}$ est donc égale à la fraction décimale 0,475. Quand le dénominateur de la fraction ordinaire donnée ne renferme ainsi que des facteurs premiers 2 et 5, il est toujours possible évidemment de rendre égaux les exposants de ces deux facteurs dans le dénominateur, en multipliant les deux termes, comme nous venons de le faire, par une puissance convenable de celui de ces facteurs qui a le plus petit exposant.

On peut faire cette remarque :

181. *Quand une fraction ordinaire irréductible peut être exactement convertie en fraction décimale, le nombre des chiffres décimaux de cette dernière est égal au plus grand des exposants de 2 et de 5 dans le dénominateur de la fraction proposée.*

182. Si toutes les fractions ordinaires ne sont pas susceptibles d'être exactement converties en fraction décimale, toutes peuvent l'être à moins de 0, 1, de 0, 01, etc..., à moins d'une unité décimale d'un ordre désigné quelconque, $\frac{1}{10^n}$.

Proposons-nous, par exemple, de convertir $\frac{19}{28}$ *en fraction décimale?*

```
190 | 28
 220 | 0,6785...
  240
   160
    20
    ...
```

$\frac{19}{28}$ peut être considéré comme le quotient de 19 par 28, ou la 28ième partie de 19. La 28ième partie de 19 est moindre que 1; donc le nombre décimal cherché n'aura pas de partie entière; écrivons au quotient un zéro, suivi d'une virgule, pour tenir la place de cette partie entière. Cela fait, évaluons notre quotient en dixièmes : 19 unités valent 190 dixièmes; pour connaître la 28ième partie de 190 dixièmes, il nous faut diviser 190 par 28.

Le quotient entier de cette division est 6 et le reste 22, donc

$$190 \text{ dixièmes} = (28 \times 6) \text{ dixièmes} + 22 \text{ dixièmes}.$$

Par suite, $\frac{190 \text{ dixièmes}}{28} = 6 \text{ dixièmes} + \frac{22 \text{ dixièmes}}{28}$.

Nous écrirons les 6 dixièmes au quotient, et il nous reste à évaluer la 28ième partie de 22 dixièmes, laquelle étant moindre qu'un dixième, doit être évaluée en centièmes. 22 dixièmes valent 220 centièmes; nous sommes conduits à diviser 220 par 28; le quotient est 7 et le reste 24; donc

$$220 \text{ centièmes} = (28 \times 7) \text{ centièmes} + 24 \text{ centièmes};$$

D'où, $\frac{220 \text{ centièmes}}{28} = 7 \text{ centièmes} + \frac{24 \text{ centièmes}}{28}$.

Nous écrivons les 7 centièmes au quotient, et il nous reste à évaluer la 28ième partie de 24 centièmes, laquelle étant moindre qu'un centième, doit être évaluée en millièmes; 24 centièmes valent 240 millièmes dont il nous faut prendre la 28ième partie; nous sommes donc conduits à diviser 240 par 28, etc.

Ce raisonnement conduit à la règle suivante :

183. RÈGLE. *Pour convertir une fraction ordinaire en décimale, on pose la division du numérateur par le dénominateur; on met un zéro au quotient, et à la droite du zéro une virgule; on ajoute un zéro à la droite du numérateur et on divise le nombre résultant par le dénominateur; le quotient est le premier chiffre décimal. On écrit un zéro à la droite du reste obtenu, et l'on divise le résultat par le dénominateur; le quotient est le 2e chiffre décimal. On ajoute un zéro au nouveau reste obtenu, et on divise par le dénominateur, etc.; on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait le reste zéro, ou qu'on ait au quotient autant de chiffres décimaux qu'on en veut avoir.*

Si le numérateur donné était plus grand que le dénominateur, on ferait la division du premier par le second comme celle de deux nombres entiers ordinaires, jusqu'au dernier reste moindre que le diviseur; alors mettant une virgule au quotient, et un zéro à la droite du reste, on continuerait l'opération en appliquant la règle précédente :

Ex. : $\frac{5974}{37}$

```
5974 | 37
227  |161,459459
 .54
  170
   220
    350
     170
      220
       350
        17 etc.
```

184. *Quand on applique cette règle à une fraction susceptible d'être exactement convertie en fraction décimale, on ne peut manquer de trouver au quotient cette fraction décimale, et d'arriver après cela au reste zéro.* En effet, d'après le raisonnement, le calcul fournit successivement le nombre des dixièmes, celui des centièmes, etc., contenus dans la valeur de la fraction ordinaire proposée, c'est-à-dire, tous les chiffres de la fraction décimale équivalente ; une fois celle-ci entièrement écrite au quotient, il est clair que, ne devant plus continuer, on doit avoir le reste zéro.

185. *Quand on arrive au reste zéro, la fraction décimale alors écrite au quotient est exactement égale à la fraction ordinaire proposée.* Cela résulte du raisonnement.

Ex. : $\frac{19}{40}$

```
190 | 40
 300| 0,475
  200
    0
```

Si on raisonne comme au n° 182, arrivé au reste 20, on trouve que $\frac{19}{40} = 0{,}47$ plus la 40e partie de 20 centièmes = 200 millièmes, laquelle est exactement 5 millièmes.

$$\frac{19}{40} = 0{,}475.$$

186. Lors donc que la fraction ordinaire donnée n'est pas sus-

ceptible d'être exactement convertie en fraction décimale, l'opération continuée aussi loin que l'on voudra ne donnera jamais le reste zéro ; mais elle donnera la valeur de la fraction ordinaire en fraction décimale à moins d'une unité décimale d'un ordre désigné quelconque.

Dans tous les cas, *si on s'arrête à un certain chiffre décimal du quotient et à un reste différent de zéro, la fraction décimale obtenue exprime la valeur de la fraction ordinaire proposée, à moins d'une unité décimale de l'ordre du chiffre auquel on s'arrête.*

Ex. : $\frac{19}{28}$. Si on s'arrête au chiffre des centièmes, il résulte du raisonnement que la valeur de $\frac{19}{28}$ se compose de 0,67, plus la 28e partie de 24 centièmes, laquelle est moindre qu'un centième (*V.* le nº 161 définition).

Lorsqu'on veut avoir la valeur d'une fraction ordinaire, à moins d'une unité décimale du $n^{\text{ième}}$ ordre, il suffit donc de lui appliquer la règle du nº 183, jusqu'à ce qu'on ait obtenu n chiffres décimaux au quotient.

DES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES.

187. Définition. *On appelle fraction décimale périodique une fraction décimale d'un nombre illimité de chiffres décimaux dans laquelle certains chiffres se reproduisent indéfiniment et dans le même ordre, à partir d'un certain rang.*

L'ensemble des chiffres qui se reproduisent ainsi périodiquement se nomme *la période.*

Une fraction décimale est dite *périodique simple*, quand la première période commence immédiatement après la virgule.

Elle est dite *périodique mixte* dans le cas contraire, et alors les chiffres décimaux qui précèdent la première période constituent *la partie non périodique.*

Ex. : 0,367367367... est une fraction périodique simple dont la période est 367.

0,58367367367... est une fraction périodique mixte dont la période est 367 et la partie non périodique 58.

Nous allons maintenant démontrer cette proposition :

188. Théorème. ***Quand une fraction ordinaire ne peut pas être exactement convertie en fraction décimale, elle se convertit en une fraction décimale périodique.***

Prenons, pour exemple, la fraction $\frac{19}{28} = \frac{19}{2^2 \times 7}$.

Si on applique indéfiniment à cette fraction la règle du n° 183, on n'arrivera jamais au reste zéro (186); les restes successifs seront tous compris dans la suite des nombres 1, 2, 3... 27, inférieurs au diviseur; par conséquent, il y aura au plus 27 restes différents les uns des autres. Si donc, durant les 27 premières divisions, un même reste n'a pas été trouvé au moins deux fois, il est certain que le reste de la vingt-huitième sera égal à l'un des restes précédents; autrement on aurait trouvé 28 restes différents; ce qui est impossible.

Puisque, dans une pareille division, un des restes doit toujours se reproduire, voyons celui qui se reproduira le premier dans notre exemple.

$$
\begin{array}{l|l}
190 & 28 \\ \hline
\;\;220 & 0{,}67857142\ldots \\
\;\;\;\;240 & \\
\;\;\;\;\;\;160 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;200 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;120 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;80 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;24.0 &
\end{array}
$$

C'est le reste 24. Ayant ajouté un zéro à la droite de 24, nous sommes dans la même position que la première fois, quand à ce reste 24, nous avons déjà ajouté un zéro. Nous avons le même dividende 240, et le même diviseur 28; nous devons opérer exactement de la même manière; tout ce qui s'est passé depuis le premier reste 24, va se reproduire exactement; on aura au quotient la même série de chiffres, 857142, et les mêmes restes obtenus de 24 à 24. Ayant retrouvé 24 après six nouvelles divisions, on recommencera la même chose; on écrira encore au quotient la même période 857142, et ainsi de suite, aussi longtemps qu'on le voudra. La fraction décimale écrite au quotient sera donc *périodique.*

189. Ainsi que nous l'avons indiqué, (186)

Si, dans la fraction décimale périodique, on prend une, deux, trois, ... n décimales, on obtient la valeur de la fraction ordinaire proposée à moins de $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots \frac{1}{10^n}$; *en général, à moins d'une unité décimale de l'ordre auquel on s'arrête* (*).

190. L'erreur commise en prenant successivement chacune de ces fractions décimales terminées, à la place de la fraction ordinaire proposée diminuant de plus en plus, et pouvant devenir moindre que tout nombre assigné, *on dit que la fraction ordinaire*, toujours supérieure à chaque fraction décimale terminée, *est la limite vers laquelle tend la fraction décimale périodique quand on prend un nombre de chiffres décimaux de plus en plus grand.*

Tel est le sens qu'il faut attacher à cette égalité :

$$0,678571428571 42\ldots = \frac{19}{28} \qquad (1).$$

DÉFINITION. *Quand les valeurs d'une quantité variable s'approchent indéfiniment d'un nombre déterminé, la différence pouvant devenir aussi petite que l'on veut, ce nombre déterminé est appelé la limite de la quantité variable.*

La fraction ordinaire est aussi appelée la *fraction génératrice* de la fraction décimale périodique.

TRANSFORMATION D'UNE FRACTION DÉCIMALE PÉRIODIQUE EN FRACTION ORDINAIRE.

191. Nous allons résoudre cette question inverse.

Étant donnée une fraction décimale périodique, trouver la fraction ordinaire génératrice.

1er CAS. *La fraction périodique donnée est simple.* Ex. :

$$0,282828\ldots$$

(1) Cette propriété distingue essentiellement la fraction décimale périodique engendrée par la conversion d'une fraction ordinaire donnée; on peut la reconnaître à ce caractère seul; car il ne saurait évidemment y avoir deux suites décimales différentes remplissant la même condition générale relativement à la fraction ordinaire donnée.

La fraction ordinaire cherchée est la limite vers laquelle doit tendre la suite périodique donnée, lorsque, l'ayant limitée d'abord, on y prend ensuite, de gauche à droite, un nombre de chiffres décimaux de plus en plus grand. Commençons donc par prendre un nombre limité de périodes, 4 par ex.; et pour abréger le discours, appelons f la fraction décimale terminée ainsi obtenue.

$$f = 0{,}28282828$$
$$100\,f = 28{,}282828,$$

nous pouvons écrire après comparaison :

$$f = 0{,}282828 + 28 \text{ cent millionièmes.}$$

Retranchant f de 100 f, partie par partie, nous aurons :

$$99\,f = 28 - 28 \text{ cent millionièmes};$$

d'où enfin $f = \frac{28}{99}$ — la 99ième partie de 28 cent millionièmes; cette 99ième partie est moindre qu'*un cent millionième.*

La fraction décimale limitée 0,28282828 *est inférieure à la fraction ordinaire,* $\frac{28}{99}$, *de moins d'une unité décimale de son dernier ordre.*

Ce raisonnement est général, et ne dépend aucunement du nombre des périodes que l'on a prises; la conclusion subsiste évidemment, quelque grand que soit le nombre de ces périodes; lors donc que ce nombre de périodes croit indéfiniment, la différence entre $\frac{28}{99}$ et la fraction décimale devient moindre qu'une unité décimale quelconque, si petite qu'on puisse l'imaginer donc, à la limite,

$$0{,}28282828\ldots = \frac{28}{99}.$$

Ainsi donc, $\frac{28}{99}$ **est *la fraction génératrice de* 0,282828 (*).**

(*) Cette conclusion est d'autant plus juste que la fraction 0,28282828.... jouit de la propriété qui distingue essentiellement la fraction décimale périodique

THÉORÈME. *Ainsi donc la fraction génératrice d'une fraction périodique simple, sans partie entière, a pour numérateur la période, et pour dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.*

192. 2e CAS. *La fraction périodique donnée est mixte.* Ex. :

$$0,37284.284.284.284\ldots..$$

La fraction ordinaire cherchée est la limite vers laquelle doit tendre la suite périodique proposée lorsque, l'ayant limitée d'abord, on y prend ensuite, de gauche à droite, un nombre de chiffres décimaux de plus en plus grand. Commençons donc par prendre un nombre limité de périodes, 3 par ex. Pour abréger le discours, appelons f la fraction décimale terminée ainsi obtenue :

$$f = 0,37284284284$$
$$100\,f = 37,284284284$$
$$100000\,f = 37284,284284.$$

Nous pouvons écrire, après comparaison :

$$100\,f = 37,284284 + 284 \text{ billionièmes.}$$

Soustrayant $100\,f$ de $100000\,f$, partie par partie, nous aurons

$$100000 - 100 \text{ ou } 99900\,f = 37284 - 37 - 284 \text{ billionièmes.}$$

D'où $f = \dfrac{37284 \quad 37}{99900}$ — la 99900ième partie de 284 billionièmes; cette 99900ième partie est moindre qu'un cent billionième; car la fraction

$$\left(\frac{284}{99900}\right) = \frac{284}{999} \times \frac{1}{100} \text{ est moindre que } \frac{1}{100}.$$

La fraction décimale terminée, 0,37284284284, diffère de la fraction ordinaire $\dfrac{37284-37}{99900}$ *de moins d'une unité décimale de son dernier ordre.*

Ce raisonnement est général, et ne dépend nullement du nombre

---

qu'engendrerait $\frac{28}{99}$, soumise à la règle du n° 183. (V. la note page 125.) On pourrait évidemment conclure après la phrase précédemment soulignée dans le texte; si nous ne l'avons pas fait, c'est afin de ne pas trop changer ce qui se dit habituellement.

des périodes que l'on a prises; la conclusion subsiste évidemment quelque grand que soit le nombre de ces périodes; lors donc que ce nombre de périodes croît indéfiniment, la différence entre la fraction décimale, et la fraction ordinaire $\frac{37284-37}{99900}$ devient moindre qu'une unité décimale quelconque, si petite qu'on puisse l'imaginer. Donc, à la limite (190),

$$0,37284284284\ldots = \frac{37284,37}{99900}.$$

Autrement dit, $\frac{37284-37}{99900}$ est la fraction génératrice de

$$0,37284284284\ldots\ldots (*).$$

Ainsi donc,

THÉORÈME. *La fraction ordinaire génératrice d'une fraction décimale périodique mixte, sans partie entière, a pour numérateur le nombre formé par la partie non périodique, et pour dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.*

On réduit, s'il y a lieu, cette fraction ordinaire à sa plus simple expression.

On peut facilement démontrer que le numérateur de la fraction ordinaire immédiatement fournie par le théorème précédent n'est jamais divisible par 10 (**).

193. Dans ce qui précède, nous avons supposé chaque fraction décimale périodique non précédée d'une partie entière; il est facile de lever cette restriction.

Si une fraction décimale périodique est précédée d'une partie entière, on aura un nombre fractionnaire équivalent au nombre décimal donné, en écrivant, à la suite de la partie entière, la fraction ordinaire équivalente à la fraction périodique qui suit la virgule. On obtient cette fraction ordinaire par une des règles précédentes.

(*) Même observation que pour le 1er cas (note précédente).

(**) Voir, si on veut, cette démonstration, et une addition à ce n° 192, à l'Appendice, page 130.

1er ex. : $19,367367... = 19 + \frac{367}{999} = \frac{19(1000-1)+367}{999}$

$= \frac{19367-19}{999}.$

2e ex. : $19,48367367... = \frac{1948,367367}{100} = \frac{1948367-1948}{99900}.$

Dans l'un et l'autre de ces exemples, on peut supprimer d'abord la virgule ; ce qui produit une fraction périodique sans partie entière ; transformer celle-ci en fraction ordinaire, puis rendre cette fraction ordinaire cent fois plus grande.

194. Théorème. *Toute fraction périodique dont la période est un* 9, *peut être remplacée par un nombre entier ou décimal que l'on obtient en supprimant la partie périodique, et augmentant d'une unité le chiffre qui la précède immédiatement.*

Par ex. : 57,999. ... = 58.

En effet, en s'arrêtant à un chiffre décimal quelconque, on a une fraction décimale terminée qui diffère de 58, en moins, d'une unité décimale de son dernier ordre.

La fraction décimale étant continuée indéfiniment, cette différence devient moindre que tout nombre, si petit qu'il soit.

Deuxième exemple : $N = 57,429999.....$

$100\ N = 5742,9999..... = 5743;$

donc $N = \frac{5743}{100} = 57,43.$

195. Corollaire. *Étant donné un nombre décimal contenant un nombre de chiffres décimaux limité ou illimité, si on supprime tous les chiffres décimaux placés à la droite d'un chiffre quelconque, l'erreur commise est moindre qu'une unité de l'ordre de ce dernier chiffre conservé.*

Soit pour exemple 57,4328451.

Supprimons tous les chiffres décimaux qui suivent le troisième ; nous obtiendrons 57,432. Nous avons

$57,432 < 57,4328451 < 57,4329999....$

ou $57,432 < 57,4328451 < 57,433.$

Le nombre proposé étant compris entre deux nombres 57,432

et 57,433, différant entre eux de 0,001, diffère de chacun d'eux de moins de 0,001.

Il résulte de là que si un nombre est équivalent à une suite décimale connue, ou qu'on pourrait trouver, composée d'un nombre de chiffres décimaux, limité ou illimité, on aura la valeur de ce nombre à $\frac{1}{10^n}$ près, en écrivant les n premiers chiffres décimaux de son expression.

On obtient la valeur du nombre donné à moins de $\frac{1}{2}$ unité décimale de l'ordre n, en plus ou en moins, de cette manière :

Ayant appliqué la règle précédente, on laisse tel qu'il est le chiffre décimal de l'ordre n, si le chiffre supprimé qui le suivait est moindre que 5. On augmente le dernier chiffre conservé d'une unité si le chiffre supprimé suivant est 5 *ou plus grand que* 5. Ainsi, dans l'exemple précédent, 57,433 est la valeur du nombre proposé 57,4328451 à $\frac{1}{2}$ millième près, par excès.

On le voit facilement en remarquant qu'on ajoute 0,001 et qu'on retranche 0,0008451. On augmente de $0,001 - 0,0008451 = 0,0001549$.

APPENDICE A LA THÉORIE DES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES (NON EXIGÉ).

Rappelons ici une proposition démontrée nº 180.

THEORÈME I. *Pour qu'une fraction ordinaire irréductible puisse être convertie en une fraction décimale terminée,* IL FAUT *et* IL SUFFIT *que son dénominateur ne renferme aucun facteur premier différent de* 2 *ou de* 5.

196. *Addition au nº* 191. Le dénominateur de la fraction génératrice d'une fraction périodique simple, tel qu'il est immédiatement fourni par le théorème énoncé nº 191, Ex. : $\frac{28}{99}$, étant terminé par un 9, n'admet ni le facteur 2 ni le facteur 5; il en sera de même, à plus forte raison, du dénominateur obtenu par la réduction de cette fraction à sa plus simple expression; car, en réduisant, on supprime des facteurs sans en introduire aucun (128). Donc :

THÉORÈME II. *Le dénominateur de la fraction irréductible génératrice d'une fraction décimale périodique simple ne renferme ni le facteur* 2 *ni le facteur* 5.

197. *Addition au nº* 192. Le numérateur de la fraction ordinaire immédiatement fourni par le théorème énoncé nº 192, Ex. : $\frac{37284 - 37}{99900}$, n'est ja

terminé par un zéro, et par suite n'est jamais divisible par 10. En effet, ce numérateur est le résultat d'une soustraction (Ex. : 37284 — 37). Pour qu'il fût terminé par un zéro, il faudrait que le dernier chiffre de la période fût égal au dernier chiffre de la partie non périodique. Ainsi, dans notre exemple, il faudrait qu'il y eût un 7 à la place du 4, ou un 4 à la place du 7. Dans le premier cas, la fraction décimale serait 0,37287287287.....; dans le deuxième, elle serait 0,34284284284.... La partie non périodique n'aurait qu'un chiffre, ce qui est contre l'hypothèse dans laquelle nous avons raisonné et opéré, pour trouver la fraction ordinaire génératrice.

Le numérateur 37284 - 37 n'étant pas divisible par 10, est privé de l'un des facteurs 2 ou 5, au moins; mais le dénominateur de la même fraction $\frac{37284-37}{99900}$ étant composé d'un certain nombre de 9 suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique, renferme chacun des facteurs 2 et 5 précisément autant de fois que l'indique ce nombre de zéros.

Lors donc qu'on aura réduit cette fraction à sa plus simple expression, s'il y a lieu, le dénominateur de la fraction irréductible obtenue renfermera encore au moins l'un des facteurs 2 et 5, celui qui manque au numérateur, avec un exposant précisément égal au nombre des zéros susdits, c'est-à-dire au nombre des chiffres de la partie non périodique de la fraction décimale. Il est d'ailleurs évident qu'il conservera aussi au moins un facteur différent de 2 et 5, puisque la fraction décimale est périodique. On peut donc établir cette proposition :

Théorème III. *Le dénominateur de la fraction irréductible génératrice d'une fraction décimale périodique mixte contient avec un ou plusieurs facteurs différents de 2 ou 5, au moins un de ces facteurs ayant un exposant précisément égal au nombre des chiffres de la partie non périodique. Il peut aussi contenir l'autre avec le même exposant, ou avec un exposant moindre.*

Chacun des théorèmes II et III a une réciproque qui est vraie.

198. 1° *Lorsque le dénominateur d'une fraction ordinaire irréductible ne renferme ni le facteur 2 ni le facteur 5, cette fraction engendre une fraction décimale périodique simple.*

En effet, elle ne peut engendrer une fraction décimale terminée (théor. I); elle donne donc lieu à une fraction périodique (188); elle ne peut donner naissance à une fraction périodique mixte (Théor. III), donc elle se convertira en une fraction périodique simple.

199. 2° *Quand le dénominateur d'une fraction ordinaire irréductible renferme l'un des facteurs 2 et 5, ou tous les deux, avec d'autres facteurs, la fraction engendre une fraction décimale périodique mixte, dans laquelle le nombre des chiffres de la partie non périodique est égal au plus grand des exposants de 2 et de 5 contenus dans le dénominateur de la fraction ordinaire.*

En effet, cette fraction ne peut se réduire en une fraction décimale terminée (théor. I); elle donne donc naissance à une fraction périodique (n° 188); d'ailleurs elle ne saurait engendrer une fraction périodique simple (théor. II); donc elle engendre une fraction périodique mixte; le reste résulte du théorème III.

ÉVALUER UN PRODUIT OU UN QUOTIENT A MOINS D'UNE UNITÉ DÉCIMALE D'UN ORDRE DONNÉ.

200. Il suffit ordinairement, dans les applications, d'obtenir les nombres demandés à moins d'une unité décimale d'un ordre donné ; on profite de cette circonstance pour abréger le calcul des nombres décimaux.

Par exemple, il existe, pour trouver ainsi un produit ou un quotient, par approximation, des méthodes plus expéditives que les règles données nos 177, 178, qui sont généralement trop longues, et peuvent même devenir impraticables, quand les nombres donnés renferment beaucoup de décimales. Nous allons faire connaître ces méthodes abrégées.

MULTIPLICATION ABRÉGÉE.

201. Ex. : On demande, à moins de 0,001, le produit de 0,489505847 par 43,8675.

RÈGLE GÉNÉRALE. *Pour obtenir, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, le produit de deux nombres donnés, on écrit le multiplicande comme à l'ordinaire ; puis on met le chiffre des unités du multiplicateur au-dessous du chiffre du multiplicande, qui représente des unités cent fois plus petites que celle qui exprime le degré d'approximation ; on écrit ensuite les autres chiffres du multiplicateur dans l'ordre inverse de l'ordre ordinaire, c'est-à-dire, les dizaines, les centaines, etc., à droite du chiffre des unités, les dixièmes, les centièmes, etc., à gauche du même chiffre des unités* (*).

(*) Le multiplicateur peut ne pas avoir de partie entière ; et même son 1er chiffre significatif à gauche peut être reculé de plusieurs rangs à droite de la virgule. Ex. : on demande le produit de 3476,846257 par 0,000378 à moins de 0,01. Dans ce cas, la règle n'est pas en défaut ; renversant le multiplicateur, on posera la multiplication comme il suit :

3476,846 257
873 000,0

Puis on appliquera la règle, en vertu de laquelle on ne tient pas compte des

Ainsi, dans notre exemple, l'unité d'approximation étant *un millième*, on écrit le chiffre 3 des unités du multiplicateur sous le chiffre des cent-millièmes du multiplicande, et on pose ainsi la multiplication.

0,4895 05847
5768,34

Cela fait, on multiplie le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur; mais, allant de droite à gauche, on commence seulement chaque multiplication partielle au chiffre du multiplicande qui est au-dessus du chiffre multiplicateur employé, en négligeant tous les chiffres de droite.

Ainsi, dans notre exemple, on multipliera 489605 par 4, puis 48960 par 3, puis 4896 par 8, etc.

On écrit tous les produits les uns sous les autres, de manière que le dernier chiffre, à droite, de chacun soit sous le dernier chiffre à droite du précédent. Puis on additionne.

0,4895 05847
5768,34
1958420
146880
39168
2934
336
20
2147758

Le produit trouvé, on sépare sur sa droite deux décimales de plus qu'il n'y en a dans la fraction décimale qui marque l'approximation. Puis, on barre les deux derniers chiffres à droite, et on augmente d'une unité le dernier chiffre conservé. Le nombre

---

zéros, qui donnent des produits nuls; on peut, d'ailleurs, se dispenser d'écrire les zéros, mais à condition de laisser leurs places inoccupées.

8476,846257
873 ....

ainsi obtenu est le produit des nombres donnés, approché par défaut ou par excès, à moins d'une unité décimale de l'ordre donné.

Dans notre exemple, la fraction qui marque l'approximation étant 0,001, on sépare 5 chiffres à la droite du produit, ce qui donne 21,47758; on barre les deux derniers, 58; on augmente d'une unité le dernier chiffre conservé, 7, et on a enfin 21,478 pour le produit de 0,489605847 par 5768,34, à moins de 0,001.

Démonstration.

On voit d'abord que les divers produits partiels expriment tous des unités de même ordre que le chiffre du multiplicande sous lequel on a placé le chiffre des unités simples du multiplicateur; (dans notre exemple, *des cent-millièmes*). Cela résulte de la disposition même donnée aux chiffres du multiplicateur, et de leurs places sous le multiplicande. On le vérifie d'ailleurs aisément comme il suit : Ex. : 0,48950 × 5 unités simples est un nombre de cent-millièmes; puis, allant de droite à gauche, on trouve 0,4895×0,4, qui est un nombre de cent-millièmes (0,0001×0,1= 0,00001); il en est de même de 0,489 × 0,03 0,001 × 0,01 = 0,00001); etc. On trouve, de gauche à droite, 0,489505 × 4 dizaines, qui est un nombre de cent-millièmes (0,000001 × 10 = 0,00001) (*).

La somme des produits partiels est donc un nombre de cent-millièmes.

Le produit obtenu 21,47758 n'est qu'une valeur approchée *par défaut*, du produit des nombres donnés. Mais *l'erreur commise* EN MOINS *ne vaut pas autant d'unités décimales du dernier ordre de ce produit qu'il y a d'unités dans la somme des valeurs absolues des chiffres* EMPLOYÉS *comme multiplicateurs successifs.*

$$4 + 3 + 8 + 6 + 7 + 5 = 33.$$

21,47758 est approché, par défaut, à moins de 33 cent-millièmes.

(*) D'une multiplication partielle à la suivante, les unités du multiplicande partiel s'élèvent d'un ordre, tandis que les unités du multiplicateur s'abaissent d'un ordre; il y a compensation quant à l'ordre des unités du produit partiel.

En effet, dans chaque multiplication partielle, nous avons négligé la partie du multiplicande située à droite du chiffre qui correspond au chiffre multiplicateur. Cette partie négligée est moindre qu'une unité de l'ordre de ce dernier chiffre du multiplicande partiel employé ; or, ainsi qu'il vient d'être expliqué, une unité de cet ordre, multipliée par le chiffre multiplicateur, donne autant de cent-millièmes qu'il y a d'unités dans ce chiffre multiplicateur ; donc l'erreur due, dans chaque multiplication partielle, à la diminution du multiplicande, ne vaut pas autant de cent-millièmes qu'il y a d'unités dans le chiffre multiplicateur employé (*). Faisant la somme des erreurs, on trouve que l'erreur totale ne vaut pas autant de cent-millièmes qu'il y a d'unités dans la somme des valeurs absolues des chiffres multiplicateurs employés. Dans notre exemple, l'erreur est moindre que

$$(4 + 3 + 8 + 6 + 7 + 5) \text{ cent-millièmes} = 33 \text{ cent-millièmes.}$$

Mais cette somme des chiffres du multiplicateur est moindre que 100 ; donc, l'erreur commise est moindre que 100 cent-millièmes, ou 0,001, si on prend pour produit 21,47758.

Donc enfin, si P est le produit exact des nombres donnés, on a

$$21,47758 < P < 21,47858$$

mais $$21,47758 < 21,478 < 2147858 ;$$

donc 21,478 est une valeur approchée de P, par défaut ou par excès, à moins de 0,001 près.

La règle énoncée est donc certainement exacte, quand la somme des valeurs absolues des chiffres employés comme multiplicateurs est moindre que 100, ce qui est le cas le plus général.

Si cette somme dépassait 100 (ce qui est très-rare, et qu'on peut savoir avant de multiplier), *on écrirait le premier chiffre à droite*

(*) Ex. : dans la 1re multiplication partielle de notre exemple, on néglige la partie du multiplicande qui suit le 5, c'est-à-dire 0,000000847 ; mais cette partie négligée ne vaut pas une unité de l'ordre du 5, c'est-à-dire 0,000001 ; or 0,000001 × 4 dizaines = 0,00004 ; donc l'erreur commise, en négligeant le produit 0,000000847 × 4 dizaines est moindre que 4 *cent-millièmes*. On peut vérifier de même pour les autres multiplications partielles.

du multiplicateur renversé sous le chiffre du multiplicande qui exprime des unités mille fois plus faibles que l'unité qui marque l'approximation ; on a ainsi au produit 3 chiffres décimaux de plus que l'on n'en veut CONSERVER (Même démonstration).

202. COMPLÉMENT DE LA RÈGLE. *Il peut arriver que, la multiplication étant posée suivant la règle, certains chiffres du multiplicateur n'aient pas de correspondants au-dessus d'eux, soit à* droite, *soit* à gauche *du multiplicande.*

1er CAS. On demande à un 0,1 près le produit de 537,8462 par 4637,842; posons l'opération suivant la règle :

537,84 62
2 48,7364

Dans ce premier cas, *on ajoute à la droite du multiplicande assez de zéros pour que chaque chiffre du multiplicateur ait son correspondant*, comme il suit :

537,84 6200
2 48,7364

et on applique la règle.

Puis, si l'on cherche comme il a été dit, n° 201, une limite de l'erreur commise sur le produit, on ne comprendra pas dans la somme des chiffres multiplicateurs les chiffres de droites 4, 6, 3, parce qu'il n'y a aucune erreur commise sur le produit partiel correspondant à chacun de ces chiffres. On commencera donc l'addition des chiffres au 7, de gauche à droite : $7+8+4+2=21$; 21 millièmes est une limite de l'erreur. En général, *on ne comprend pas dans la somme susdite les chiffres multiplicateurs employés qui n'ont aucun chiffre significatif à leur droite dans le multiplicande.*

2e CAS. Trouver à moins de 0,1 le produit de 537,846257 par 637,94378564; posons l'opération suivant la règle :

537,84 6257
465873 49,736

Dans ce cas, on applique la règle à chaque chiffre du multi-

plicateur qui en a un au-dessus de lui dans le multiplicande; arrivé au premier des chiffres 5, 6, 4, qui n'ont pas de correspondants au-dessus d'eux, on ne continue pas la multiplication; on termine l'opération par l'addition des produits obtenus, comme si ces chiffres 5, 6, 4 n'existaient pas; on applique d'ailleurs, en tout point, la règle donnée.

Si on cherche une limite supérieure de l'erreur, on ajoute à la somme $6+3+7+9+4+3+7+8$ des chiffres multiplicateurs EMPLOYÉS, qui laissent à leur droite, dans le multiplicande, autant d'unités plus une qu'il y en a dans le premier chiffre à gauche du multiplicande (dans notre ex : $5+1$). On obtient ainsi 53 millièmes pour limite supérieure de l'erreur.

Cette addition de $5+1$ s'explique ainsi : tout le multiplicande ne vaut pas 6 centaines; toute la partie négligée du multiplicateur ne vaut pas un cent-millième; donc, en négligeant de multiplier tout le multiplicande par cette partie du multiplicateur, on ne commet pas une erreur égale à $600 \times 0,00001 = 0,006$.

On peut avoir à appliquer à la fois ces deux règles complémentaires.

203. REMARQUE. *La règle de multiplication abrégée ainsi complétée est toujours applicable, quelque grand que soit le nombre des chiffres décimaux des nombres donnés, qu'il soit limité ou illimité* (*).

204. Cette règle suffit grandement si on a peu d'intérêt à connaître la valeur exacte du dernier chiffre conservé et le sens précis de l'erreur. S'il en est autrement, on pourra continuer ainsi :

Au produit trop faible obtenu, on ajoute le nombre d'unités décimales trouvé pour limite de l'erreur en moins; dans notre premier exemple, c'est 33 cent-millièmes. La somme ainsi trouvée est évi-

---

(*) On peut aussi faire servir cette règle à trouver un produit à moins d'une unité simple ou à moins d'une unité d'ordre supérieur; mettez simplement à moins d'une unité d'un ordre donné dans l'énoncé de la règle, puis modifiez un peu la fin de cette manière : l'addition faite, on supprime les deux derniers chiffres à droite, et on augmente d'une unité le dernier chiffre conservé. Si l'unité simple indique l'approximation, on a ainsi le nombre demandé; si l'unité d'approximation est d'ordre supérieur, on ajoute à la droite du nombre obtenu autant de zéros qu'il y en a après 1 dans l'écriture en chiffres de l'unité d'approximation.

demment plus grande que le produit exact des deux nombres donnés. Ainsi on a :

$$21,47758 < P < 21,47791.$$

Les chiffres de gauche, communs à ces deux valeurs approchées, appartiennent à la vraie valeur du produit P.

Ainsi 21,477 est une valeur de P, approchée à moins de 0,001 par défaut.

Il est facile de voir que ce moyen ne réussira pas toujours

205. Voici une remarque applicable à toutes les questions d'approximation.

Le moyen le plus général pour connaître exactement le dernier chiffre auquel on veut s'arrêter dans un calcul d'approximation quelconque, c'est d'opérer comme si on demandait le nombre cherché à moins d'une unité de l'ordre immédiatement inférieur à l'unité d'approximation proposée; puis le résultat trouvé, on efface le dernier chiffre. Si le dernier chiffre, calculé dans ce but, était un 9, il faudrait en calculer un de plus. Ce moyen général ne doit être employé qu'à défaut de plus simple.

EXERCICES. Calculer à moins de 0,01, le produit de 537,485327 par 4,53784. Rép. 2439,02.

Id., à moins de 0,1 le produit 534,5827 par 45,53742. Rép. 24343,5.

Id., à moins d'une unité le produit de 53,87426 par 58,4796428. Rép. 4065.

DIVISION ABRÉGÉE.

206. Il s'agit d'obtenir le quotient de la division de deux nombres entiers ou décimaux, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné par un procédé plus court que la méthode ordinaire, et *applicable, quel que soit le nombre des chiffres décimaux du nombre donné.*

La question proposée peut toujours être ramenée à celle-ci :

207. *Trouver, au moyen d'une unité, le quotient de la division de deux nombres entiers ou décimaux.*

En effet, soit proposé de trouver, à moins de 0,001, le quotient de deux nombres quelconques, de D par *d*. On multiplie le dividende, D, par l'unité suivie de 3 zéros, ou 1000; on cherche en-

suite, à moins d'une unité simple, le quotient du nombre ainsi obtenu, 1000 D, par le diviseur d; ce quotient trouvé, on le divise par 1000; autrement dit, on sépare trois chiffres décimaux sur la droite. Le résultat est le quotient demandé de D par d, à moins de 0,001.

En effet, soit q le quotient approché, à moins d'une unité, de 1000 D par d, on a :

$$q < \frac{1000\,D}{d} < q+1\,;$$

d'où

$$\frac{q}{1000} < \frac{D}{d} < \frac{q+1}{1000}.$$

$\frac{q}{1000}$ est donc le plus grand nombre de millièmes contenus dans le quotient de D par d; ce qu'il fallait prouver.

Cela est facile à généraliser.

Traitons maintenant la question générale à laquelle on ramène les autres.

MÉTHODE DE DIVISION ABRÉGÉE.

208. RÈGLE. *Pour obtenir, à moins d'une unité, le quotient de la division de deux nombres entiers ou décimaux, on détermine d'abord le nombre des chiffres de la partie entière du quotient; on prend ensuite sur la gauche du diviseur ce nombre de chiffres plus deux, et on barre les autres; puis on prend sur la gauche du dividende assez de chiffres pour avoir au moins une fois, et moins de dix fois le diviseur restreint. On divise ce dividende partiel par ce diviseur; on a un premier chiffre à gauche du quotient, et un premier reste. On barre ensuite le dernier chiffre, à droite, du diviseur que l'on vient d'employer, puis on divise le premier reste par le nouveau diviseur ainsi obtenu; on a un deuxième chiffre du quotient et un deuxième reste. On barre un nouveau chiffre à droite du diviseur; on divise le 2e reste par le diviseur ainsi modifié; on a un troisième chiffre du quotient et un troisième reste; ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait écrit successivement au quotient autant de chiffres que doit en avoir la partie entière du quotient des deux nombres donnés. On a alors obtenu ce quotient à moins d'une unité.*

Ex. : On demande, à moins d'une unité, le quotient de

5384627,3548267 par 825,34826432.

Déterminons d'abord le nombre des chiffres que doit avoir la partie entière du quotient de ces deux nombres. Pour cela, il suffit d'avancer, par la pensée, la virgule du diviseur de manière à avoir un nombre qui contienne au moins une fois, et moins de dix fois le dividende; il est nécessaire ici de l'avancer de quatre places vers la droite; on conclut de là que le dividende contient 1000 fois le diviseur, et ne le contient pas 10000 fois; la partie entière du quotient a donc quatre chiffres: nous prendrons donc six chiffres à gauche du diviseur. Pour plus de commodité dans la démonstration de la règle, déplaçons la virgule dans le dividende et le diviseur de manière que, le quotient ne changeant pas, cette virgule se trouve à droite du dernier chiffre conservé dans le diviseur. Ayant ainsi posé la division, nous appliquerons la règle précédente :

5384627	354,8267	825~~348~~	~~26432~~
432539		6524	
19869			
3363			
63			

6524 est le quotient demandé à moins d'une unité (*).

DÉMONSTRATION. Posons, pour abréger l'écriture :

D = 5384627354,8267 ; d = 825348,26432, et R = 63354,8267.

On observera d'abord que nous n'avons opéré que sur les 5384627 mille du dividende D; il est ensuite facile de voir qu'au lieu de retrancher de ce dividende les quatre produits partiels de la multiplication du diviseur complet, d, par 6524, nous avons retranché successivement des 5384627 mille du dividende, D, les divers produits partiels de la multiplication de 825348.26332 par

(*) *Cette règle suffit toujours.* Elle parait, il est vrai, en défaut dans deux cas singuliers qui se présentent *très-rarement*; mais quand l'un de ces cas se présente, *il n'est besoin d'aucune règle;* car le quotient cherché se complète immédiatement sans calcul. (V. l'Appendice, page 142.) Cela étant, nous n'avons pas cru nécessaire de modifier notre règle. au risque d'en rendre la pratique et l'explication moins simples.

6524, *exécutée par la méthode de multiplication abrégée*, le chiffre 6 des mille de 6524 renversé étant placé sous les unités simples du multiplicande, comme il suit :

$$
\begin{array}{r}
825348,26432 \\
4256 \\
\hline
4952088 \text{ mille.} \\
412670 \\
16506 \\
3300 \\
\hline
P = 5384564 \text{ mille.}
\end{array}
$$

Les multiplicandes partiels de cette opération sont précisément les diviseurs restreints successivement employés dans la division.

Tous ces nombres de mille ayant été successivement retranchés du dividende D, il reste 63 mille, plus la partie 354,8267 que les soustractions n'ont pas atteinte. Le reste total $R = 63354,8267$; nous avons d'abord $D = P + R$.

Ensuite le produit P étant inférieur à $825348,26432 \times 6524$, ou $d \times 6524$, d'une certaine quantité inconnue α, nous poserons $d \times 6524 = P + \alpha$; d'où $P = d \times 6524 - \alpha$, et $D = d \times 6524 + R - \alpha$; d'où enfin

$$\frac{D}{d} = 6524 + \frac{R}{d} - \frac{\alpha}{d}.$$

On aura démontré que 6524 est le quotient de D par d, à moins d'une unité, si on prouve que l'on a en même temps : 1° $R < d$; 2° $\alpha < d$.

Or, d'abord, d'après le calcul, 63 est inférieur à 825 au moins d'une unité ; donc 63000 est inférieur à 825000 au moins d'un mille ; et on a $63354,8267 < 825000$, et, à fortiori, 63354,8267, ou $R < 825348,26432$, ou $R < d$.

En second lieu, les unités du dernier ordre des divers produits partiels de la multiplication abrégée ci-dessus étant des mille, on a vu, p. 134, que l'erreur en moins, α, commise sur le produit, ou l'excès, α, du produit vrai $825348,26432 \times 6524$, $(d \times 6524)$, sur le produit approché P, est moindre que $1000 \times (6 + 5 + 2 + 4) = 17000$; $\alpha < 17000$, et, à fortiori, $\alpha < d = 825348,26432$.

Donc 6524 est le quotient cherché, à moins d'une unité.

Cette démonstration établit l'exactitude de la règle pour le cas le plus ordinaire, celui où la somme des chiffres du quotient est moindre que 100; alors α est moindre qu'une unité de la plus haute espèce du quotient multipliée par 100, c'est-à-dire, α est moindre que le plus petit des nombres qui ont deux chiffres de plus que le quotient; or, la partie entière du diviseur d a deux chiffres de plus que le quotient; donc $\alpha < d$.

209. Si la somme des chiffres du quotient surpassait 100, il faudrait, pour faire la division, prendre à gauche du diviseur, dès le commencement, trois chiffres de plus que n'en doit avoir le quotient approché, et on appliquerait d'ailleurs la règle précédente. V. la 1re Remarque de l'Appendice.

210. SCHOLIE. Le raisonnement et la règle s'appliquent quel que soit le nombre des décimales du dividende ou du diviseur, que ce nombre soit limité ou illimité.

211. REMARQUE. L'égalité $\frac{D}{d} = 6524 + \frac{R}{d} - \frac{\alpha}{d}$ montre que le quotient est approché, par défaut ou par excès, suivant que l'on a $R > \alpha$, ou $\alpha > R$.

Connaissant donc une limite supérieure de α, on la comparera à R. Si on trouve R plus grand que cette limite, on en conclura que le quotient est approché par défaut. Ainsi, dans notre exemple, nous avons $\alpha < 17000$, et $R > 17000$; donc, 6524 est le quotient approché par défaut.

Si on trouve une limite supérieure de α plus grande que R, on ne saurait en conclure $\alpha > R$.

Ce moyen de connaître le sens de l'erreur ne réussissant pas toujours, on aura recours, au besoin, au moyen général indiqué n° 205.

APPENDICE A LA DIVISION ABRÉGÉE.

212. REMARQUE IMPORTANTE. Dans huit cas sur 9 on peut abréger davantage comme il suit :

Quand le premier chiffre du diviseur est au moins égal à 2, on peut ne prendre à gauche du diviseur qu'un chiffre de plus que ne doit en renfermer la partie entière du quotient. Ainsi, dans notre exemple, on peut prendre pour 1er diviseur 82534; alors on modifie légèrement la règle comme il suit :

Ayant fait la 1re division partielle par 82534, on ajoute un zéro à la droite du 1er reste, et on divise une seconde fois par le même diviseur 82534; puis, après cette division, on continue suivant la règle générale, n° 208, en gardant les restes successifs pour dividendes, et barrant chaque fois un chiffre à droite du dernier diviseur (*).

Voici l'opération :

```
538462   | 735,48967  |825̸3̸4̸| 826432.
 432580                 6524
  19910
   3404
    104
```

L'explication est très-simple. Le diviseur surpasse 20000; l'erreur appelée α dans le raisonnement, page 141, se compose ici : 1° de l'erreur commise en négligeant le produit de 0,826432 par 6000, laquelle est moindre que 6000, et dans tous les cas moindre que 9000; 2° d'une erreur égale à 0,826432 × 500, qui est moindre que 500; 3° d'une 3e erreur 4,826432 × 20, moindre que 200; 4° d'une 4e erreur 34,826432 × 4, moindre que 400; enfin de celle que l'on a commise en ajoutant un zéro au premier reste à la place du chiffre suivant du dividende, laquelle est au plus égale à 900.

20000 — 9000 = 11000; 11000 — 900 = 10100. Pour que la méthode fût en défaut, il faudrait donc que la somme des chiffres du quotient qui suivent le premier trouvé fût plus grande que 101. La simplification a consisté à transformer les limites d'erreurs partielles en centaines au lieu de mille.

Exemples des cas singuliers.

213. 1er Cas. La division étant préparée comme il est indiqué dans le calcul effectué, n° 208, *il arrive que le premier diviseur restreint se trouve identiquement reproduit à la gauche du dividende*. Dans ce cas, le quotient approché, à moins d'une unité, dont on connait le nombre de chiffres, s'exprime toujours par 1 suivi d'un certain nombre de zéros.

1er Ex. : 53876534,27648... | 53876,2378942 / 1000 par défaut.

2e Ex. : 53876234,27648... | 53876,2378942 / 1000 par excès.

Il ne peut se présenter que deux cas ; la virgule étant avancée dans le diviseur complet d'autant de places moins une vers la droite qu'il doit y avoir

(*) Cette simplification, qui peut se présenter 8 fois sur 9, nous paraît très-importante à connaître. Elle augmente l'utilité de la méthode de division abrégée qui, aussi bien que la méthode de multiplication, suffit dans tous les cas, même pour les approximations relatives.

de chiffres au quotient approché, on obtient un nombre inférieur ou supérieur au dividende.

Dans nos exemples, on doit l'avancer de 3 places. Dans le premier on trouve ainsi un nombre moindre que le dividende; le quotient est au moins 1000; il ne vaut pas 1001; car si on écrit le diviseur sous 1000 fois lui-même, comme il suit, puis qu'on additionne,

$$\begin{array}{r} 53876237,\ 8942 \\ 53876,\ 2378942 \\ \hline \end{array}$$

on aura un nombre supérieur au dividende, car la partie à gauche 53876 est augmentée.

Dans le 2ᵉ exemple on trouve un nombre supérieur au dividende; celui-ci ne vaut pas 1000 fois le diviseur; le quotient est moindre que 1000, mais il vaut au moins 999; car si on soustrait le diviseur de 1000 fois lui-même, comme il suit :

$$\begin{array}{r} 53876237,\ 8942 \\ 53876,\ 2378942 \\ \hline \end{array}$$

le reste est plus petit que le dividende; car la partie à gauche 53876 est diminuée; le dividende est donc supérieur à 1000 — 1 ou 999 fois le diviseur. Dans les deux cas, 1000 est donc le quotient à moins d'une unité, par défaut ou par excès.

Le raisonnement est général; car son exactitude tient à ce que la partie entière du diviseur a au moins un chiffre de plus que celle du quotient.

214. 2ᵉ Cas. *Il arrive qu'un des restes contient* 10 *fois son diviseur abrégé. Dans ce cas, on ne continue pas le calcul; il suffit de mettre à la suite des chiffres trouvés autant de 9 qu'il reste de chiffres à trouver dans le quotient approché à moins d'une unité.*

Ex. : Trouver le quotient de 2316686806, 1749 par 538765, 327 à moins d'une unité.

On voit facilement que le quotient demandé aura 4 chiffres.

$$\begin{array}{l|l} 23166868 \mid 06{,}1749 & 5387\not{6}\not{5} \mid 327 \\ \quad 161626 & \quad 4299 \\ \quad\ 53874 & \end{array}$$

Après deux divisions, ayant trouvé 42 au quotient, on voit que le reste 53874 pris pour dividende contient dix fois le diviseur correspondant 5387; le quotient cherché est 4299, à moins d'une unité, par défaut ou par excès.

En effet, soit $\qquad R = 53874806{,}1749.$

Le dividende $\qquad D = d \times 4200 + R - \alpha.$

α étant l'erreur due aux 2 multiplications du diviseur incomplet par 4000 et 200, laquelle est moindre que $(4+2)\,1000$, d'après le raisonnement connu :

$$\frac{D}{d} = 4200 + \frac{R}{d} - \frac{\alpha}{d}.$$

Or, à cause de 53874 < 53876, R ne contient pas 100 fois le diviseur; mais il le contient au moins 99 fois; car si on soustrait le diviseur de 100 fois lui-même, le reste, égal à 99 fois le diviseur, est moindre que R.

$$\begin{array}{r} 53876532{,}7 \\ 538765{,}327 \\ \hline 53326041{,}373 \end{array}$$

et cela parce que la partie à gauche 5387 se trouve diminuée; donc $\frac{R}{d}$ est au moins égal à 99. Or $\frac{a}{d} < 1$; donc 4299 est le quotient à moins d'une unité.

Ce raisonnement est général; car son exactitude tient à ce que la partie entière du 1er diviseur employé contient plus de chiffres que celle du quotient (*).

ERREURS RELATIVES CORRESPONDANTES DES DONNÉES ET DU RÉSULTAT D'UN CALCUL.

215. Notions générales. L'erreur commise sur un nombre donné ou cherché peut être appréciée de deux manières : ou en elle-même et d'une manière absolue; par ex. : Quand on dit que ce nombre est approché à moins d'un 10me, d'un 40me d'unité; ou bien, comme une partie, une fraction déterminée du nombre sur lequel elle est commise; par ex. : Quand on dit que ce nombre est approché à moins d'un 10me, d'un 40me de sa valeur. Dans le 1er cas, l'erreur est *absolue*; dans le second, elle est *relative*.

Il importe moins en général de considérer les erreurs absolues que les erreurs relatives; par ex. : Il importe moins de savoir si une longueur est approchée à moins d'un 10me, d'un 100me de mètre, que de savoir si elle est approchée à moins d'un 10ième, d'un 100ième de sa valeur propre. Un particulier qui, possédant 40 francs, perd 1 franc, éprouve une perte relativement plus grande et plus sensible que celui qui, possédant 4000 francs, perd 10 francs, bien que 10 francs soient plus que 1 franc. C'est ici le cas de dire que tout est relatif.

(*) A droite de 5837 (dernier diviseur abrégé), dans la partie entière de 53876532,7, il y a autant de chiffres que dans le quotient approché; en effet de ces chiffres, les uns, 65 (chiffres barrés), correspondent un à un aux chiffres trouvés du quotient; les autres, 32 (multiplication par 100) correspondent aux chiffres à trouver. La partie entière du diviseur 538765,327 a 2 chiffres de plus que le quotient approché; la partie 5387 de 53876532,7 ne peut donc manquer d'être atteinte et diminuée dans la soustraction du texte.

On conçoit donc qu'on ait souvent occasion dans les applications de considérer les erreurs relatives ; nous allons donc nous en occuper.

216. Définition. Quant à la place d'un nombre A *on met une valeur approchée* A', *on appelle* ERREUR ABSOLUE *la différence* A — A' *ou* A' — A, suivant que le nombre est approché par défaut, ou par excès, en moins ou en plus.

On appelle ERREUR RELATIVE *le quotient de l'erreur absolue* A — A' *par la valeur exacte* A.

Dans l'exemple ci-dessus des 40 fr., la perte absolue est 1 fr., et la perte relative $\frac{1}{40}$. Dans le cas des 4000 fr., la perte absolue est 10 fr., et la perte relative $\frac{1}{400}$.

217. Théorème. *Si on ne prend que les* m *premiers chiffres d'un nombre entier ou décimal* A, *à partir du* 1er *chiffre significatif à gauche, à moins d'une unité de l'ordre du dernier chiffre calculé ou conservé, la valeur approchée* A', *considérée comme un nombre d'unités de ce dernier ordre, exprime la valeur du nombre proposé* A, *avec une erreur* RELATIVE *moindre que* $\frac{1}{10^{m-1}}$.

1er ex. : Au nombre 53974628 on substitue 53970000 ; on conserve 4 chiffres, à partir du 1er significatif à gauche ; l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$.

En effet, on a 53974628 > 1000 dizaines de mille (unités de l'ordre du 4e chiffre, 7).

L'erreur absolue 53974628 — 53970000 < 1 dizaine de mille.

Donc l'erreur relative

$$\frac{53974628-53970000}{53974628} < \frac{1 \text{ diz. de mille}}{1000 \text{ diz. de mille}} \text{ ou } \frac{1}{1000}.$$

2e ex. : Au nombre 57,38425726, qui a trop de décimales, on substitue par approximation 57,384 (on prend 5 chiffres à gauche) ; l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{10^4}$ ou $\frac{1}{10000}$.

En effet, 57,38425726 > 10,000 ou 10000 millièmes.

L'erreur absolue $57,38425726 - 57,384 < 1$ millième (195).
L'erreur relative

$$\frac{57,38425726 - 57,384}{57,38425726} < \frac{1 \text{ millième}}{10000 \text{ millièmes}} \text{ ou } \frac{1}{10000}.$$

Généralisons. Le nombre A, (de l'énoncé), est plus grand que 10^{m-1} unités de l'ordre de son $m^{ième}$ chiffre significatif, à partir de la gauche. L'erreur absolue $A - A'$ est moindre que 1 unité du même ordre. Pour ces deux raisons, l'erreur relative $\frac{A - A'}{A}$ est moindre que le quotient d'une unité par 10^{m-1} unités,

$$\frac{A - A'}{A} < \frac{1}{10^{m-1}}.$$

218. *Mais pour qu'on soit assuré que l'erreur absolue commise sur un nombre cherché est moindre qu'une unité de son $m^{ième}$ chiffre à partir de la gauche, il ne suffit* pas néanmoins que l'erreur relative soit moindre que $\frac{1}{10^{m-1}}$; mais il suffira qu'elle soit moindre que $\frac{1}{10^m}$.

En effet, prenons pour unité, u, l'unité du $m^{ième}$ chiffre.

On a d'abord comme précédemment $10^{m-1}.u < A < 10^m.u$.

Cela posé, si $\frac{A - A'}{A} < \frac{1}{10^{m-1}}$ ou $A - A' < \frac{A}{10^{m-1}}$; à cause de $A > 10^{m-1}.u$, on ne peut garantir $A - A' < \frac{10^{m-1}.u}{10^{m-1}}$ ou $A - A' < u$.

Mais si $\frac{A - A'}{A} < \frac{1}{10^m}$ ou $A - A' < \frac{A}{10^m}$, comme $A < 10^m.u$, on peut garantir $A - A' < \frac{10^m.u}{10^m}$ ou $A - A < u$.

219. Remarque. Si K désigne le 1er chiffre significatif à gauche du nombre A précédent, ce nombre A est plus petit que $(K+1)10^{m-1}.u$; il suffira donc que l'on ait $\frac{A - A'}{A} < \frac{1}{(K+1)10^{m-1}}$ pour garantir $A - A' < u$.

Après les exemples précédents, on comprendra aisément ces démonstrations.

220 L'erreur relative du résultat d'un calcul dépend naturellement des erreurs relatives des données de la question. Nous allons chercher comment la première se déduit des dernières dans la multiplication et la division.

La lettre A désignant une valeur exacte, nous désignerons la valeur approchée par la lettre *accentuée* A′, et l'erreur relative par la lettre *a*.

$$\frac{A - A'}{A} = a, \text{ donne } A - A' = a \times A, \text{ puis } A = A' + a.\,A;\ (m).$$

MULTIPLICATION.

221. 1er CAS. *Un seul facteur est inexact.*

THÉORÈME. *Quand un seul facteur est inexact, l'erreur relative du produit est égale à l'erreur relative de ce facteur.*

$$A = A' + a,\ A.$$
$$A \times B = (A' + a \times A)B = A' \times B + a.\,A \times B.$$

Erreur absolue, $A \times B - A' \times B = a.\,A \times B.$ (1)

Donc l'erreur relative, $\frac{A \times B - A' \times B}{A \times B} = a.$ (2)

Ce qui démontre le théorème énoncé.

222. 2e CAS. *Les deux facteurs sont inexacts.*

THÉORÈME. *L'erreur relative sur le produit de deux facteurs inexacts est moindre que la somme des erreurs relatives des deux facteurs.*

$$A = A' + a.\,A; \qquad B = B' + b.\,B.$$

D'après l'égalité (1), ci-dessus, on a successivement :

$$A \times B - A' \times B = a.\,A \times B.$$
$$A' \times B - A' \times B' = b.\,A' \times B.$$

Ajoutant membre à membre, on trouve :

$$A \times B - A' \times B' = a \times A \times B + b.\,A' \times B.$$

Remplaçant A' par le nombre plus grand A, on trouve :

$$A \times B - A' \times B' < a \cdot A \times B + b \cdot A \times B \quad \text{ou} \quad (a+b) \times A \times B.$$

D'où l'erreur relative, $\dfrac{A \times B - A' \times B'}{A \times B} < a + b.$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

223. Ce théorème s'étend évidemment à un produit d'un nombre quelconque de facteurs.

COROLLAIRE. *L'erreur relative de la* $m^{\text{ième}}$ *puissance d'un nombre est moindre que* m *fois l'erreur relative du nombre lui-même.*

Division.

224. 1er CAS. *Le dividende seul est inexact.*

THÉORÈME. *Quand le dividende seul est inexact, l'erreur relative du quotient est égale à l'erreur relative du dividende.*

$$A = A' + a \cdot A.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A' + a \cdot A}{B} = \frac{A'}{B} + a \cdot \frac{A}{B}.$$

Erreur absolue, $\quad \dfrac{A}{B} - \dfrac{A'}{B} = a \cdot \dfrac{A}{B}. \qquad (1)$

Erreur relative, $\quad \left(\dfrac{A}{B} - \dfrac{A'}{B}\right) : \dfrac{A}{B} = a.$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

2e CAS. *Le diviseur seul est inexact* (par excès).

THÉORÈME. *Quand le diviseur seul est inexact, l'erreur relative du quotient est moindre que l'erreur relative du diviseur.*

Nous prendrons le diviseur approché par excès, afin que le quotient soit approché par défaut. Alors

$$B' = B + b \cdot B$$

Erreur absolue, $\dfrac{A}{B} - \dfrac{A}{B'} = \dfrac{A}{B} - \dfrac{A}{B + b \cdot B} = \dfrac{b \cdot A \times B}{B(B + b \cdot B)}.$

Remplaçant $B + bB$ par le nombre plus petit B, on a :

$$\frac{A}{B} - \frac{A}{B'} < \frac{b \cdot A \times B}{B \times B} \text{ ou } b \cdot \frac{A}{B} \qquad (2)$$

Donc l'erreur relative $\left(\frac{A}{B} - \frac{A}{B'}\right) : \frac{A}{B} < b.$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

3° CAS. *Le dividende et le diviseur sont inexacts.*

THÉORÈME. *Quand le dividende et le diviseur sont inexacts, l'erreur relative du quotient est moindre que la somme des erreurs relatives du dividende et du diviseur.*

On prend le dividende par défaut, et le diviseur par excès, afin que le quotient soit approché par défaut.

$$A = A' + a \cdot A; \qquad B' = B + b \cdot B.$$

Opérant comme dans le 1er et le 2e cas, égalités (1) et (2), on trouve :

$$\frac{A}{B} - \frac{A'}{B} = a \cdot \frac{A}{B};$$

puis $\frac{A'}{B} - \frac{A'}{B'} < b. \frac{A'}{B} < b. \frac{A}{B}$

D'où, en ajoutant, on déduit :

L'erreur absolue $\frac{A}{B} - \frac{A'}{B'} < a \cdot \frac{A}{B} + b \cdot \frac{A}{B} = (a + b) \cdot \frac{A}{B};$

d'où l'erreur relative $\left(\frac{A}{B} - \frac{A'}{B'}\right) : \frac{A}{B} < a + b.$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

Applications de ces principes généraux.

225. PROBLÈME. *Calculer un produit à moins de $\frac{1}{10^m}$ de sa valeur.*

Ou ce qui revient au même (218),

Calculer les m premiers chiffres significatifs à gauche d'un pro-

duit, à moins d'une unité de l'ordre du dernier chiffre calculé.

L'erreur relative du produit devant être moindre que $\frac{1}{10^m}$, pour qu'on soit sûr d'avoir le produit avec cette approximation, il suffit que l'erreur relative de chaque facteur soit moindre que $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^m}$ (221). Il suffira, à fortiori, qu'elle soit moindre que $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10^m}=\frac{1}{10^{m+1}}$, ce qui arrivera si on prend $m+2$ chiffres de chaque facteur, à partir du 1er chiffre significatif à gauche.

RÈGLE. *Pour calculer le produit de deux nombres entiers ou décimaux, à moins de $\frac{1}{10^m}$ de sa valeur, ou ce qui revient au même, pour connaître les* m *premiers chiffres à gauche de ce produit, à moins d'une unité du dernier chiffre calculé, il suffit de prendre* $m+2$ *chiffres de chaque facteur, à partir du 1er chiffre significatif à gauche, et d'effectuer la multiplication des nombres ainsi obtenus.*

L'espèce des unités du produit dépendra de celles des deux facteurs approchés.

Si le 1er chiffre à gauche de chaque facteur est au moins égal à 2, il suffit de prendre $m+1$ *chiffres à partir du 1er chiffre significatif, à gauche, de chacun.* Cela résulte du no 220.

Ex. : Calculer à moins de $\frac{1}{10000}$ de sa valeur, le produit de 537,45326 par 87,645278.

On prendra 6 chiffres à gauche de chaque facteur, et on fera cette multiplication :

$$\begin{array}{r} 537{,}453 \\ 87{,}6452 \\ \hline \end{array}$$

Le produit qui aura sept décimales sera approché à moins d'une unité de son quatrième chiffre. Si on veut seulement conserver les quatre premiers chiffres à gauche, on pourra effacer les autres en augmentant d'une unité le dernier chiffre conservé (*).

On peut employer ici le procédé de la multiplication abrégée.

(*) Les premiers chiffres à gauche des deux facteurs étant 5 et 8, on aura

DIVISION.

226. *Trouver les 4 premiers chiffres à gauche du quotient* de 537,45326 par 87,645878, *à moins d'une unité du dernier ordre calculé*, ou bien :

Calculer le quotient de ces deux nombres à moins de $\frac{1}{10000}$ *de sa valeur.*

Il suffira que l'erreur relative de chaque terme soit moindre que $\frac{1}{2}\,\frac{1}{10000}$; car la somme des erreurs sera moindre que $\frac{1}{10000}$; il suffira donc, à fortiori, que cette erreur relative soit ici moindre que $\frac{1}{100000}$; on prendra dans les deux termes 6 chiffres à gauche; on divisera 537,453 par 87,6452; on s'arrêtera au quatrième chiffre du quotient, que l'on augmentera d'une unité.

La règle générale et sa démonstration sont évidemment les mêmes pour la division que pour la multiplication (225), à cause de la similitude des principes, n°s 221 et 223, 3e cas.

Règle. *Pour calculer le quotient de deux nombres entiers ou décimaux à moins de* $\frac{1}{10^m}$ *de sa valeur.*

Ou, ce qui revient au même, (218), *pour trouver les m premiers chiffres d'un quotient, à partir du premier chiffre significatif à gauche; il suffit de prendre* m + 2 *chiffres de chacun des termes de la division, à partir du premier significatif à gauche, puis de diviser l'un par l'autre les deux nombres obtenus, comme s'ils étaient donnés à priori.*

Si le 1er chiffre à gauche de chaque terme est au moins 2, *il suffit de prendre* m + 1 *chiffres à gauche du dividende et du diviseur.* Cela résulte de la remarque n° 220.

Si l'un des termes était exact avec moins de $m + 2$ chiffres,

---

l'approximation voulue en prenant un chiffre de moins dans chaque facteur; comme il suit :

537,45
 87,645

il suffirait de prendre $m+1$ chiffres dans l'autre facteur (223, 1er et 2e cas).

La méthode de division abrégée peut être appliquée avec avantage.

Remarque. Puisqu'en définitive, pour obtenir un quotient avec une approximation relative, il suffit de calculer un *nombre déterminé* de ses chiffres de gauche, une fois la question posée ainsi, on peut très-bien la résoudre par la méthode de division abrégée dans laquelle on part précisément de ce nombre de chiffres.

Dans l'exemple précédent, le diviseur commençant par un 8, il suffira d'employer 5 chiffres à gauche du dividende et du diviseur; on divisera 537,45 par 87,645; cette simplification a lieu dans les 2 méthodes. (V. la note précédente et le n° 212.)

EXERCICES.

Trouver les 10 premiers chiffres décimaux du quotient de 1 par 3,14159265358979... (calcul de $\frac{1}{\pi}$). *Rép.* 0,3183098861.

Trouver les 10 premiers chiffres du quotient de 1 par 0,4342944819032... $\left(\frac{1}{\log. e.}\right)$. *Rép.* 2,302585092.

Vérifier en divisant 1 par chacun des résultats.

Trouver le quotient de 57,389742 par 3,14159265358... à moins de 0,000001.

Trouver le produit du même nombre par 0,3183098861... à moins de 0,000001.

Trouver le quotient de 7,3948271 par 0,43442944819... à moins de 0,0000001.

Trouver le produit du même nombre par 2,302585092... à moins de 0,0000001.

Résoudre ces questions par les deux méthodes.

CHAPITRE III.

DES MESURES. — APPLICATIONS DES QUATRE OPÉRATIONS PRINCIPALES SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX.

SYSTÈME MÉTRIQUE.

227. Introduction. Pour évaluer chaque espèce de grandeurs, il faut, avons-nous dit, une *unité* ou *mesure* fixe qui serve de terme de comparaison.

Autrefois, en France, comme dans les autres pays, la plus grande confusion régnait dans les mesures; chaque province avait ses mesures particulières; il en résultait des embarras extrêmes pour le commerce. Le gouvernement qui a, de tout temps, senti les inconvénients d'un pareil état de choses, a fait longtemps d'inutiles efforts pour établir l'uniformité des mesures par toute la France; il y est enfin parvenu.

Le 8 mai 1790, l'assemblée constituante établit une commission de savants chargée de préparer un système général de poids et mesures. Le nouveau système dû à cette commission, adopté par la convention, sanctionné plus tard par le corps législatif, fut rendu obligatoire le 2 novembre 1801. Son introduction dans la pratique rencontra cependant de nombreux obstacles; la tolérance dont le gouvernement crut devoir user, pendant un assez grand nombre d'années, pour les habitudes prises ne servit qu'à perpétuer les embarras auxquels on avait voulu remédier. Il fallut prendre un parti décisif, et une loi, votée le 4 juillet 1837, interdit, à partir du 1er janvier 1840, sous les peines portées par le code pénal, art. 479, l'usage de poids et mesures autres que ceux du système légal déjà promulgué en 1801. Depuis 1840, ce système règne exclusivement dans toute la France; il est donc de la

dernière importance que les élèves se familiarisent avec la théorie et la pratique de ce nouveau système qu'on nomme *système métrique*, parce que toutes les mesures y dérivent du mètre, unité de longueur.

Ces mesures peuvent se partager en six classes principales : 1° les mesures *linéaires* ou de *longueur*; 2° les mesures de *surface* ou de *superficie*; 3° les mesures de *volume* ou de *solidité*; 4° les mesures de *capacité*, pour les liquides, les grains, les graines, etc.; 5° les mesures de *poids*; 6° les unités *monétaires* ou unités de *valeur*.

Mesures de longueur.

228. Afin de donner une base durable, facile à retrouver, au nouveau système de mesures, on a rattaché l'unité de longueur à la grandeur de la terre; puis, on a fait dépendre de cette unité toutes les autres unités, même d'espèces différentes.

L'unité principale pour les longueurs est le MÈTRE.

Le *mètre* est la *dix-millionième* partie du quart de la circonférence de la terre. Pour l'obtenir, on a mesuré la distance du pôle à l'équateur terrestre, en suivant toujours le même méridien.

229. Dans le nouveau système, toutes les subdivisions et les multiples employés de l'unité principale d'une espèce quelconque sont soumis à la loi décimale.

Ces multiples ou sous-multiples servent eux-mêmes d'unités pour les grandeurs qui s'éloignent trop de l'unité principale, au-dessus et au-dessous. Aussi, s'est-on attaché à désigner chacun d'eux par un mot unique, rappelant exactement sa relation avec l'unité principale. Pour former ces noms, on fait précéder celui de l'unité principale des mots :

Milli, *centi*, *déci*, *déca*, *hecto*, *kilo*, *myria*,

qui signifient respectivement :

millième, *centième*, *dixième*, *dix*, *cent*, *mille*, *dix mille*.

230. Employant des mots pour le mètre, on forme le tableau suivant des unités de longueur :

Millimètre.	millième de mètre.
Centimètre.	centième de mètre.

Décimètre.	dixième de mètre.
MÈTRE.	unité principale.
Décamètre.	dix mètres.
Hectomètre.	cent mètres.
Kilomètre.	mille mètres.
Myriamètre.	dix mille mètres.



La figure ci-jointe représente un décimètre divisé en centimètres, le premier centimètre étant d'ailleurs subdivisé en millimètres.

231. Ainsi que nous l'avons dit, chacune des longueurs susdites sert d'unité au besoin, en vertu de ce principe : l'unité dont on se sert ne doit être ni trop grande, ni trop petite, relativement à la grandeur que l'on veut mesurer. On aime mieux dire : de Paris à Madrid, il y a 1444 kilomètres, que dire : il y a 1444000 mètres.

Les physiciens, dont les mesures portent le plus souvent sur de petites longueurs, prennent habituellement le *millimètre* ou le *centimètre* pour unité. Dans l'évaluation des distances itinéraires, on adopte pour unité le *kilomètre* ou le *myriamètre* (*). Enfin, dans l'arpentage et les levers de terrain de petite étendue, on emploie le *décamètre*, et quelquefois *l'hectomètre*.

232. Pour mesurer les longueurs, on se sert habituellement de règles.

Les petites longueurs se mesurent à l'aide d'une règle de 1 *décimètre*, plus souvent de 2 décimètres (*double décimètre*). Cette règle est divisée en centimètres et millimètres ; on peut aisément évaluer les petites longueurs à moins de $\frac{1}{2}$ millimètre.

Les longueurs ordinaires se mesurent avec une règle, ou avec un mètre brisé ou pliant, en bois, en baleine, en os, etc...

Dans le lever des plans, on se sert de règles de sapin ou de

(*) Sur beaucoup de routes, les *kilomètres* sont indiqués par des bornes principales, et les *hectomètres* par des bornes plus petites numérotées de 1 à 9, chaque 10ième borne étant une borne de kilomètre.

métal de 1, 2, 4, ou 6 mètres, et aussi de la *chaîne d'arpenteur* (*décamètre*), dont la longueur est de 10 mètres, subdivisée en 10 parties égales.

Mesures de surface ou de superficie.

233. Les unités de surface ou de superficie sont des carrés, dont les côtés ont pour longueurs les unités de longueur.

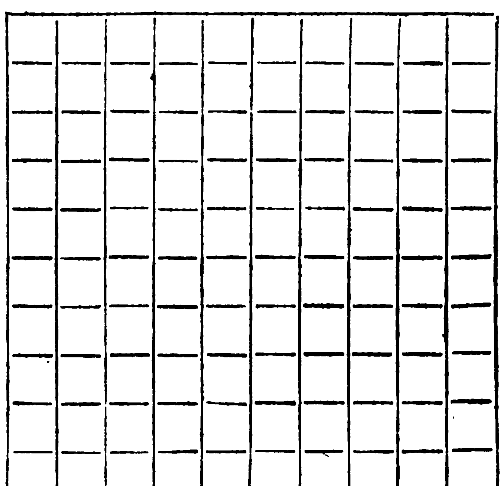
L'unité principale pour les surfaces est le *mètre carré;* c'est un carré dont le côté est long d'un mètre.

De celle-là dérivent les autres, qui sont le *décimètre carré*, le *centimètre carré*, ... le *décamètre carré*, l'*hectomètre carré*, le *kilomètre carré;* ce sont des carrés ayant respectivement pour côtés un *décimètre*, un *centimètre*, un *décamètre*, un *hectomètre*, un *kilomètre.*

Chacune de ces unités vaut cent fois l'unité immédiatement inférieure.

Le mètre carré vaut 100 *décimètres* carrés, le décimètre carré vaut 100 centimètres carrés, le décamètre carré vaut 100 mètres carrés, etc.

On le démontre en géométrie; on le voit facilement sur cette figure.



Le côté du grand carré représente l'une des unités de longueur, et l'une des subdivisions (le côté d'un petit carré) représente l'unité de longueur 10 fois moindre. Si, par exemple, le côté du grand carré est un décimètre, ses subdivisions sont des centimètres, et la figure sert à montrer qu'un décimètre carré équivaut à 100 centimètres carrés.

234. Évaluer une surface, c'est chercher combien elle contient de mètres carrés, de décimètres carrés, etc..... Il peut y avoir jusqu'à 99 unités de chaque ordre.

Si la surface est étendue, on commence par des unités supérieures au mètre carré.

Le *mètre carré* sert d'unité pour les surfaces ordinaires; par ex. : Les surfaces intérieures ou extérieures d'une maison, murs, plafonds, parquets, etc.

Mesures agraires. Pour la mesure des terrains d'une certaine étendue, jardins, champs, bois, etc..., on emploie comme unité principale le *décamètre* carré, auquel on a donné le nom d'*are.*

Parmi les multiples de l'*are*, on emploie *exclusivement* l'hectare = cent ares, et parmi les subdivisions le *centiare*, un centième d'are (*).

L'*hectare*, qui vaut 100 décamètres carrés, ou 100 fois 100 mètres carrés, n'est autre chose qu'un hectomètre carré. D'un autre côté, le centiare est la même chose que le mètre carré. On dira un jardin de 42 ares 60 centiares; un domaine de 148 hectares 42 ares.

Mesures topographiques. Pour exprimer la surface d'un pays, on emploie le kilomètre carré ou le myriamètre carré.

Au-dessous du mètre carré, on emploie le décimètre carré et le centimètre carré, le millimètre carré.

On emploie ces unités inférieures quand il s'agit d'évaluer des surfaces de petites dimensions, comme une feuille de verre, de papier, de carton;

Pour mesurer les dimensions des surfaces, on emploie les mesures linéaires effectives mentionnées au n° 231.

(*) On n'emploie ni le déciare, ni le décare, ni le kiloare ou kilare, parce que les carrés équivalant à ces sous-multiples ou multiples de l'are, n'auraient pas pour côtés les sous-multiples ou multiples décimaux du mètre.

Mesures des volumes ou solides.

235. On appelle *cube* un volume ayant la forme d'une boîte terminée par six faces carrées (un dé à jouer a la forme d'un cube); tous les côtés d'un cube ont même longueur.

On prend pour unités de volume les cubes construits sur les unités de longueur.

L'unité principale pour les volumes est le mètre cube; c'est un cube dont le côté a un mètre de longueur. On n'emploie guère d'unités plus grandes que le mètre cube. Mais on emploie fréquemment le *décimètre cube* et le *centimètre cube*, qui sont des *cubes* ayant respectivement pour côtés 1 décimètre, 1 centimètre.

Chacune des unités de volume est mille fois plus grande que l'unité immédiatement inférieure. Le mètre cube vaut *mille* décimètres cubes; le décimètre cube vaut *mille* centimètres cubes; etc... Cela se démontre en géométrie (*).

Le mètre cube sert à évaluer les travaux de maçonnerie et de terrassement, les bois de construction, les blocs de pierre et de marbre, les amas de pierres divisées, de sable, de gravier, etc.

236. BOIS DE CHAUFFAGE. L'unité de volume pour le bois de chauffage est le STÈRE, qui n'est autre chose que le mètre cube sous un autre nom.

Le *stère* n'a qu'un multiple employé, le *décastère*. Le plus généralement même, on multiplie le stère par les nombres ordinaires; 40 stères, 100 stères; on dit plutôt 10 stères qu'un décastère.

(*) On peut facilement se rendre compte de ce fait comme il suit : imaginons une grande boîte ou caisse de forme cubique, dont le fond, qui est un décimètre carré, est subdivisé, comme celui du n° 232, en cent centimètres carrés. Sur chacun de ces petits carrés, on pose un dé à jouer, dont le côté est 1 centimètre; le fond sera ainsi recouvert, à la hauteur d'un centimètre, d'une couche de cent dés à jouer ou cent centimètres cubes. Sur ces premiers dés, on en pose cent autres; la hauteur de la double couche composée de deux cents petits cubes sera de 2 centimètres; sur la 2e couche, on en place une 3e; et ainsi de suite jusqu'à ce que la caisse qui a dix centimètres de haut soit pleine. Évidemment elle renfermera alors dix fois cent dés à jouer ou mille centimètres cubes.

Il n'y a qu'un seul sous multiple du stère, c'est le *décistère*, dixième du stère.

Le stère, mesure effective, a la forme d'un châssis, composé d'une solive horizontale, nommée *sole*, sur laquelle s'appuient deux montants verticaux écartés l'un de l'autre de 1 mètre, et dont la hauteur varie avec la longueur habituelle des bûches; cette hauteur serait de 1 mètre si les bûches étaient longues de 1 mètre. Les bûches ayant $1^m,14$ de longueur, comme à Paris, les montants du stère ont seulement 88 centimètres de hauteur. La géométrie donne la raison de ce fait.

Mesures de capacité.

237. L'unité principale pour la mesure des liquides, des grains, graines, etc., est le LITRE, équivalant au *décimètre cube*.

Autrement dit, le litre est un vase dont la contenance est la même que celle d'une boîte cubique dont le côté aurait un décimètre de long.

Les subdivisions usitées du litre sont le *décilitre* et le *centilitre*.

Les multiples employés sont le *décalitre* et l'*hectolitre*.

On n'a pas donné aux mesures de capacité la forme cubique, trop incommode sous plusieurs rapports.

Pour les mesures des liquides, on se sert de vases cylindriques en étain, dont la hauteur est double du diamètre; les capacités de ces vases sont 1 *litre*, 5 *décilitres*, 2 *décilitres*, 1 *décilitre*, 5 *centilitres*, 2 *centilitres*, 1 *centilitre*.

Pour la mesure des grains, graines et légumes secs, on se sert de vases cylindriques en bois, dont la hauteur est égale au diamètre; les capacités de ces vases sont : 1 *hectolitre*, 5 *décalitres*, 2 *décalitres* (double décalitre), 1 *décalitre*, 5 *litres*, 2 *litres*, 1 *litre*, 5 *décilitres*, 2 *décilitres*, 1 *décilitre*.

Poids.

238. L'unité de poids est le GRAMME; c'est ce que pèse dans le vide 1 centimètre cube d'eau distillée à la température de 4 degrés centigrades. A cette température, l'eau atteint son maximum de densité.

Les subdivisions usitées du gramme sont :

Le *décigramme* (dixième de gramme), le *centigramme* (centième de gramme), le *milligramme* (millième de gramme).

Les multiples du gramme sont :

Le *décagramme* (10 grammes), l'*hectogramme* (100 grammes), le *kilogramme* (1000 grammes).

Le *quintal métrique* qui vaut 100 kilogrammes.

Et enfin, le tonneau de mer ou la tonne, qui vaut 1000 kilogrammes.

Il est bon d'observer que le kilogramme est le poids d'un litre d'eau distillée à la température de 4 degrés centigrades; le tonneau de mer est le poids d'un mètre cube du même liquide.

239. Les poids adoptés pour peser les marchandises sont en fonte de fer ou en cuivre. On les distingue en trois séries, les *gros poids*, qui dépassent le kilogramme; les poids *moyens*, qui vont du kilogramme au gramme; les *petits poids*, qui commencent à partir du *gramme*.

Les poids en fonte de fer sont de 50 kilogr., de 20 kilogr., de 10 kilogr., de 5 kilogr., de 2 kilogr., de 1 kilogr., de 5 hectogrammes, de 2 hectogr.; de 1 hectogr. et de 5 décagrammes.

La forme des poids de 50 et de 20 kilogrammes en fonte est celle d'une pyramide tronquée dont la base est un rectangle à angles arrondis; la forme des autres poids en fonte est celle d'une pyramide tronquée, dont la base est un hexagone régulier. Tous les poids doivent avoir les dimensions prescrites par les instructions ministérielles (19 décembre 1839).

Les poids en cuivre sont de 20 kilogrammes, de 10 kilogr., de 5 kilogr., de 2 kilogr., de 1 kilogr., de 5 hectogrammes, de 2 hectogr., de 1 hectogramme, de 5 décagrammes, de 2 décagr., de 1 décagramme, de 5 grammes, de 2 grammes, de 1 gramme; et les poids inférieurs au gramme ci-après désignés.

Les poids en cuivre, depuis celui de 20 hectogrammes jusqu'au gramme, ont la forme d'un cylindre surmonté d'un bouton.

La hauteur du cylindre doit égaler son diamètre et celle du bouton doit en être la moitié, excepté pour les poids de 1 et 2 grammes, qui doivent avoir le diamètre plus grand que la hauteur.

Les poids cylindriques, jusqu'à 200 grammes, peuvent être massifs ou creux.

Les poids d'un demi-gramme et au-dessous sont des lames de cuivre minces et carrées. Ce sont les poids de 5 décigrammes, 2 décigrammes, 1 décigramme, 5 centigrammes, 2 centigrammes, 1 centigramme. 5 milligrammes, 2 milligrammes, 1 milligramme, Ils serven principalement à peser les choses précieuses comme les matières d'or et d'argent, les perles, les diamants, etc.; on les emploie aussi dans les manipulations chimiques, dans les recherches de physique très-délicates, et dans la pharmacie. Les dimensions de ces lames de laiton sont aussi fixées.

Il y a encore des poids en cuivre, ayant la forme de *godets coniques*, qui s'empilent les uns dans les autres, et dont le plus grand est une boîte qui les renferme tous. Chaque série forme un poids d'un kilogramme, ou de l'un des sous-multiples du kilogr., et chaque pièce correspond à l'un des poids cylindriques.

240. *Observation générale.* Toutes les mesures et tous les poids à l'usage du commerce doivent porter ostensiblement les dénominations des mesures ou des poids qu'ils représentent, ainsi que le nom ou la marque du fabricant.

Tout acheteur a le droit de s'assurer si les mesures ou les poids qui servent à évaluer les marchandises sont conformes à la loi.

Monnaies.

241. L'unité monétaire est le FRANC. Le franc est une pièce *qui pèse 5 grammes*; il contient les neuf dixièmes de son poids en argent pur, et l'autre dixième en cuivre.

Les subdivisions usitées du franc sont :

Le *décime*, dixième de franc,
Le *centime*, centième de franc.

Les multiples du franc n'ont pas reçu de noms particuliers.

La série des monnaies se compose de 12 pièces, dont la valeur, le diamètre et le poids sont indiqués dans le tableau suivant :

Nous donnons la nouvelle série de monnaies de bronze remplaçant les monnaies de cuivre dont la démonétisation a été décrétée le 6 mai 1852. Le bronze de ces pièces se compose de 0,95 de cuivre; 0,04 d'étain; 0,01 de zinc.

TABLEAU *des pièces de monnaie légale en circulation.*

INDICATION et valeur DES PIÈCES.		DIAMÈTRE des pièces.	POIDS des pièces.
		millim.	grammes.
3 en or.	40 francs.	26	12,90322
	20	21	6,45161
	10	19	3,22580
5 en argent.	5	37	25
	2	27	10
	1	23	5
	$\frac{1}{2}$ fr.	18	2,5
	$\frac{1}{5}$ fr. (20 cent.)	15	1
4 en bronze (*).	10 centimes.	30	10
	5 centimes.	25	5
	2 centimes.	20	2
	1 centime.	15	1

Le mélange de plusieurs métaux fondus ensemble est un *alliage*; tout fragment d'un métal ou d'un alliage s'appelle *lingot*.

Le TITRE *d'un lingot relativement à l'un des métaux qui le constituent est le quotient de la division du poids de ce lingot par le poids total de l'alliage*. Si par ex. : un lingot contient les neuf dixièmes de son poids en or pur, l'autre dixième étant composé de métaux différents quelconques, le titre de ce lingot est 0,9 par rapport à l'or.

Le titre légal des nouvelles monnaies françaises est 0,9 ou 0,900. Les monnaies d'or ou d'argent contiennent les neuf dixièmes de leur poids en or ou en argent; le reste est en cuivre.

(*) Les monnaies de cuivre encore en circulation sont les pièces de 1 décime, 5 centimes, 1 centime.

Tolérance sur le poids des pièces de monnaie. Comme il serait très-difficile de fabriquer des pièces qui eussent exactement le poids légal, la loi tolère une petite erreur en plus ou en moins, relative au poids des pièces ; c'est ce qu'on appelle *tolérance de poids.*

Pour les pièces en or, c'est 0gr.,026 pour la pièce de 40 fr., et 0gr.,13 pour celle de 20 fr.

Pour la pièce de 2 fr., 0gr.,025 ; pour 1 fr., 0gr.,05 ; pour 5 fr., 0gr.,075.

Il y a aussi une tolérance de titre qui est de 0,002 en plus ou en moins pour les monnaies d'or et d'argent.

CALCUL DES GRANDEURS RAPPORTÉES AUX UNITÉS DU SYSTÈME MÉTRIQUE.

CONVERSIONS. — EXERCICES.

242. Les multiples et les subdivisions des nouvelles unités étant soumises à la loi décimale (228), le calcul des grandeurs mesurées avec ces unités a lieu sur des nombres entiers ou décimaux.

Quand on ne considère dans la question traitée qu'une seule unité de chaque espèce, il n'y a qu'à appliquer les règles du calcul décimal.

Quand on a employé des unités de diverses valeurs pour mesurer des grandeurs de la même espèce, il convient de rapporter ces grandeurs à la même unité qui sera l'unité principale de l'espèce, ou toute autre qu'il conviendra de choisir à cet effet ; cela fait, on sera ramené au premier cas susdit. Transformer ainsi l'expression d'une grandeur revient à écrire un nombre sachant combien il renferme de dizaines de mille (myria), de mille (kilo)..., de dixièmes (déci), de centièmes (centi)..., d'une certaine unité. Il n'est donc besoin d'aucune règle spéciale ; quelques exemples suffiront.

Changements d'unités dans le système métrique.

243. 1° Une longueur renferme 7 hectomètres, 3 décamètres, 8 mètres, 6 centimètres, 4 millim. ; écrire sa valeur en mètres.

Les seules définitions du n° 229 conduisent à écrire $734^{\text{mèt.}},064$.

2° Une surface se compose de 29 décamètre carrés, 8 mèt. car., 37 déc. car., 54 millim. car. Écrire sa valeur en mètres carrés.

On connaît les unités de superficie (282) dans l'ordre de leurs grandeurs décroissantes, des plus élevées aux plus faibles du nombre donné ; chacun de ces ordres d'unités doit être représenté par deux chiffres, même les ordres intermédiaires qui pourraient manquer (dans notre ex. : les centim. car.), à l'exception de l'ordre le plus élevé, qui peut n'être représenté que par un seul chiffre. En conséquence, le mètre carré devant être la seule unité exprimée, nous écrirons

$$2908^{\text{mèt.car.}},370054.$$

3° Un domaine renferme 49 hectares, 7 ares, 24 centiares. Écrire la valeur en hectares.

Rép. $49^{\text{hectares}},0724$.

4° Un volume renferme 37 hectom. cubes, 9 décam. cubes, 317 mèt. cubes, 19 décim. cubes, 387 centim. cubes, 200 millim. cubes. Écrire la valeur en mètres cubes.

Dans le cas des unités cubiques (mesures de solides seulement), chaque ordre d'unités, depuis les plus élevées jusqu'aux plus faibles existant dans l'expression de la grandeur donnée, y compris les unités intermédiaires qui pourraient manquer, doit être représenté par 3 chiffres, à l'exception de l'ordre le plus élevé, qui peut seul n'être représenté que par 1 ou 2 chiffres. Si donc le mètre cube est pris pour seule unité dans la question actuelle, on écrira ainsi le volume indiqué.

$$37009317^{\text{mèt.cub.}},019387200.$$

5° Une pièce de vin renferme 6 hectolitres, 9 litres, 3 décalitres, 4 centilitres. Ecrire son contenu en litres.

Pour les unités de capacité, chaque ordre est représenté par un seul chiffre comme pour les longueurs ; mais il ne faut pas oublier les ordres intermédiaires qui peuvent manquer. On écrira dans notre exemple :

$$609^{\text{lit.}},34.$$

6° Un navire apporte 587 tonneaux, 387 kilogrammes, 3 hectog., 5 décag., 8 grammes de sel. Traduisez en kilogrammes :

$$587387^{\text{kilog.}},358.$$

Après les tonneaux (milliers de kilog.), chaque ordre est représenté par un seul chiffre.

244. *Réciproquement*, une grandeur étant exprimée à l'aide d'une seule unité, on peut facilement savoir combien elle renferme d'unités des ordres supérieurs ou inférieurs à cette unité.

1° S'il s'agit d'une longueur exprimée en mètres, en allant de *droite à gauche, à partir de la virgule*, le 1er chiffre exprime des mètres, le second des décamètres, etc.; puis de *gauche à droite*, le 1er chiffre exprime des décimètres, le 2e des centimètres, etc... (229).

Ex. : $734^{\text{mét.}},064.$

Traduisez 7 hectomètres, 3 décamètres, 4 mètres, 6 centimètres, 4 millimètres.

2° *S'il s'agit d'une surface exprimée en mètres carrés, on commence par rendre le nombre des chiffres décimaux pair, s'il ne l'est pas, en y ajoutant un zéro; puis on partage par la pensée, ou par un signe quelconque, le nombre en tranches de deux chiffres, à droite et à gauche, à partir de la virgule.* Cela fait, on trouve, à la gauche de la virgule, 1re TRANCHE, *les mètres carrés;* 2e TRANCHE, *les décamètres carrés, etc..., jusqu'à la dernière tranche à gauche qui peut n'avoir qu'un chiffre;* puis, à droite de la virgule, *on trouve, 1re tranche, les décimètres carrés;* 2e *tranche, les centimètres carrés, etc.*

Ex. : $72908^{\text{mét.car.}},53004.$

On ajoute un zéro, et on écrit ainsi

$$7.29.08^{\text{mét.car.}},53.00.40\,;$$

puis on traduit 7 hectom. car., 29 décam. car., 8 mèt. car., 53 décim. car., 40 millim. carrés.

3° $49^{\text{hect.}},0724.$

Lisez 49 hectares, 7 ares, 24 centiares.

4° *S'il s'agit d'un volume exprimé en mètres cubes* (mesures des solides), *on rend le nombre des chiffres décimaux multiples de 3, s'il ne l'est pas; cela fait, on partage en tranches de 3 chiffres, à droite et à gauche, à partir de la virgule; puis on part des unités cubiques principales (dans notre hypothèse, les mètres cubes); on trouve à gauche de la virgule :* 1re tranche, *mètres cubes;* 2e tranche, *décamètres cubes, etc., jusqu'à la dernière tranche à gauche, qui peut n'avoir qu'un ou deux chiffres; puis à droite de la virgule, on trouve :* 1re tranche, *les décimètres cubes;* 2e tranche, *les centimètres cubes, etc.*

Ex. : 37009317^mét.cub.^,0193872.

Écrivez d'abord ainsi :

37.009.317^mét.cub.^,019.387.200.

Puis lisez 37 hectom. cubes, 9 décam. cubes, 317 mèt. cubes, 19 décim. cubes, 387 centim. cubes, 200 millim. cubes.

5° Pour les hectolitres, c'est la même chose que pour les mètres; les unités changent d'un chiffre à l'autre.

609^lit.^,34.

Traduisez 6 hectolitres, 9 litres, 3 décilitres, 4 litres.

6° Pour les poids, même explication à partir des tonneaux qui sont représentés par les mille du nombre de kilogrammes :

3874237^kilog.^,208.

Lisez 3874 tonneaux, 237 kilog., 2 décagr., 8 grammes.

245. Si une grandeur est rapportée à une seule unité quelconque, on peut, par une simple transposition de la virgule, la rapporter à une autre unité plus petite ou plus grande.

Si l'unité devient 10, 100, 1000 ... fois plus petite, la même grandeur contient 10, 100, 1000 ... fois plus d'unités nouvelles que d'anciennes, il faut avancer la virgule de 1, 2, 3 ... rangs vers la droite pour rendre le nombre 10, 100, 1000 ... fois plus grand; c'est l'inverse quand l'unité nouvelle est 10, 100, 1000 ... fois plus grande que l'ancienne; on recule la virgule vers la gauche, puisque la grandeur donnée doit contenir la nouvelle unité 10, 100, 1000 ... fois moins de fois.

Ex. : $5842^{\text{mét.}},3876$ à convertir en kilomètres. $1^{\text{kilom.}} = 1000^{\text{mét.}}$; on recule la virgule de 3 places, et on écrit

$$5^{\text{kilom.}},8423876.$$

Convertir le même nombre en centimètres; $1^{\text{mét.}},100^{\text{centim.}}$; on avance la virgule de 2 places vers la droite :

$$584238^{\text{centim.}},76.$$

2° ex. : $7^{\text{mét.car.}},38762$; convertir en *ares* ou en décamètres rrés, $1^{\text{are}} = 100^{\text{mét.car.}}$, on recule la virgule de 2 places; d'où

$$7^{\text{mét.car.}},38762 = 0^{\text{are}},0738762.$$

Convertir le même nombre en centimètres carrés; $1^{\text{mét.car.}} = 10000^{\text{centim.car.}}$; on écrira

$$73876^{\text{centim.car.}},2.$$

3° ex. : $38762^{\text{grammes}},24$; convertir en kilog.; $1^{\text{kil.}} = 1000^{\text{grammes}}$; on écrira

$$38^{\text{kilog.}},76224.$$

246. Avant de passer aux exercices sur les grandeurs mesurées avec les unités du système métrique, nous ferons suivre la nomenclature de ces unités nouvelles et leur conversion les unes dans les autres de tableaux contenant :

1° La nomenclature des anciennes mesures françaises, qui ont été le plus en usage, comparées aux nouvelles;

2° La nomenclature des mesures étrangères les plus importantes, également comparées aux mesures françaises correspondantes (*).

Puis, nous servant de ces tableaux, nous apprendrons à convertir les mesures métriques soit en anciennes mesures françaises, soit en mesures étrangères, et *vice versâ*.

(*) Les valeurs des mesures ou monnaies étrangères ne sont pas fixes au même degré que les nouvelles mesures françaises; l'Annuaire du bureau des longitudes donne chaque année ces valeurs disposées en tableaux analogues à ceux-ci. V. cet Annuaire pour 1852.

TABLEAUX DES ANCIENNES MESURES DE FRANCE ET DES PRINCIPALES MESURES ÉTRANGÈRES COMPARÉES AUX NOUVELLES MESURES DE FRANCE.

Mesures anciennes de France comparées aux nouvelles.

Mesures de longueur.

Point (1/12 de ligne)	0,188 millimètres.
Ligne (1/12 de pouce)	2,256 millimètres.
Pouce (1/12 de pied)	0,2707 décimètre.
Pied	0,32484 mètre.
Toise (6 pieds)	1,94904 mètre.
Aune (6322 points)	1,18845 mètre.
Mille (1000 toises)	1,94904 kilomètre.
Lieue de poste (2 milles)	3,89808 kilomètres.

Mesures de superficie.

Ligne carrée	5,0887 millimètres carrés.
Pouce carré	7,3278 centimètres carrés.
Pied carré	0,1055 mètre carré.
Toise carrée	3,7987 mètres carrés.
Aune carrée	1,4124 mètre carré.
Perche des eaux et forêts (carré ayant 22 pieds de côté)	51,07 mètres carrés.
Perche de Paris (carré ayant 18 pieds de côté)	34,19 mètres carrés.
Arpent des eaux et forêts (100 perch. de 22 pieds)	5107,20 mèt. car. ou 0,5107 hect.
Arpent de Paris (100 perc. de 18 p..)	3418,87 mèt. car. ou 0,3419 hect.

Mesures de capacité.

Ligne cube	0,01148 centimètre cube.
Pouce cube	0,019836 décimètre cube.
Pied cube	0,03428 mètre cube.
Toise cube	7,4039 mètres cubes.
Voie pour la mesure des bois (56 p. cub.)	1,91952 mètre cube.
Corde des eaux et forêts (2 voies)	3,83905 mètres cubes.
Solide (3 pieds cubes)	0,10283 mètre cube.
Pinte (pour la mesure des liquides)	0,9313 litre.
Velte (8 pintes)	7,4505 litres.
Quartaut (9 veltes)	67,0545 litres.
Feuillette (2 quartauts)	1,34109 hectolitre.
Muid (2 feuillettes)	2,68218 hectolitres.
Litron (pour la mesure des matières solides)	0,8130 litre.
Boisseau (16 litrons)	13,008 litres.
Setier (12 boisseaux)	1,5610 hectolitre.

Mesures anciennes de France comparées aux nouvelles (Suite).

Poids.

Grain (1/24 de denier).	0,053 gramme.
Denier ou scrupule (1/3 de gros).	1,275 gramme.
Gros (1/8 d'once).	3,824 grammes.
Once (1/8 de marc)..	30,59 grammes.
Marc (1/2 livre).	0,24475 kilogramme.
Livre poids.	0,48951 kilogramme.
Quintal (100 livres).	48,951 kilogrammes.

Monnaies.

MÉTAL.	DÉNOMINATION DES PIÈCES.	VALEUR.
OR.	Double louis de 48 livres.	47 fr. 20 c.
	Louis de 24 livres.	23 55
	Demi-louis de 12 livres.	11 77
ARGENT.	Écu de 6 livres.	5 80
	Écu de 3 livres.	2 55
	Livres tournois (*unité monétaire*. Elle se subdivisait en 20 sols, le sol en 4 liards et en 12 deniers. (Il n'existait pas de pièce de 1 livre).	0 fr. 99 c. ou $\frac{80}{81}$ franc.
	Pièce de 30 sols.	
	Pièce de 24 sols.	
	Pièce de 15 sols.	
	Pièce de 12 sols.	
BILLON.	Pièce de 2 sols.	
	Pièce de 6 liards.	
CUIVRE.	Pièce de 2 sols.	
	Pièce de 1 sol.	
	Pièce de 2 liards.	
	Pièce de 1 liard.	

Mesures anglaises comparées aux nouvelles mesures françaises (*).

Mesures de longueur.

Inch, pouce (1/36 du yard).	2,539954 centimètres.
Foot, pied (1/3 du yard).	3,0479449 décimètres.
Yard impérial.	0,91438348 mètre.
Fathom (2 yards).	1,82876696 mètre.
Pole ou perch (5 1/2 yards).	5,02911 mètres.
Furlong (220 yards).	201,16437 mètres.
Mile (1760 yards).	1609,3149 mètres.
Mile marin.	1852 mètres.
Lieue marine (3 miles).	5556 mètres.
Nail (1/16 du yard) } pour les étoffes. .	0,057177 décimètre.
Quarter (1/4 du yard) } pour les étoffes. .	0,228595 décimètre.

Mesures de superficie.

Yard carré.	0,836097 mètre carré.
Rod (perche carrée).	25,291939 mètres carrés.
Rood (1210 yards carrés).	10,116775 ares.
Acre (4840 yards carrés).	0,404671 hectare.

Mesures de capacité.

Pint (1/8 de gallon)	0,567932 litre.
Quart (1/4 de gallon).	1,135864 litre.
Pottle (1/2 gallon).	2,271728 litres.
Gallon impérial.	4,54345797 litres.
Peck (2 gallons).	9,0869159 litres.
Bushel (8 gallons)	36,347664 litres.
Sack (3 bushels) (pour les liquides).	1,09043 hectolitre.
Quarter (8 bushels).	2,907813 hectolitres.
Load (5 quarters).	11,53902 hectolitres.
Chaldron (12 sacks).	13,08516 hectolitres.

Poids. — 1er *Système* (troy, pour les matières précieuses).

Grain (24e de pennyweight).	0,064798 gramme.
Pennyweight (20e d'once).	1,555160 gramme.
Once (12e de la livre troy.).	31,103101 grammes.
Livre troy impériale (5760 grains).	373,238296 grammes.

Poids. — 2e *Système* (avoirdupoids, pour les usages ordinaires).

Dram (16e d'once).	1,772 grammes.
Once (16e de la livre).	28,349 grammes.
Pound ou livre avoirdupoids imp. (7000 grains troy).	453,558 grammes.
Stone (14 pounds)	6,349 kilogrammes.
Quarter (28 pounds).	12,698 kilogrammes.
Hundredweight (cwt) ou quintal (112 livres). . . .	50,80 kilogrammes.
Ton (20 quintaux).	1016,04 kilogramm.

(*) Les mesures anglaises sont les mêmes que celles des États-Unis d'Amérique, à l'exception des monnaies.

(Suite.) **Monnaies anglaises.**

MÉTAL.	DÉNOMINATION DES PIÈCES.	POIDS légal.	TITRE légal.	VALEURS.
OR	Guinée de 21 shillings.	gr. 8,830	0,917	fr. 26,47
	Demi-guinée.	4,190	0,917	13,235
	Quart de guinée.	2,095	0,917	6,6175
	Tiers de guinée ou 7 shillings.	2,793	0,917	8,8233
	Souverain de 20 shillings (1818).	7,981	0,917	25,21
ARGENT	Crown ou couronne de 5 shillings anc.	30,074	0,925	6,16
	Shilling ancien.	6,015	0,925	1,24
	Crown ou couronne depuis 1818.	25,251	0,925	5,81
	Shilling depuis 1818.	5,650	0,925	1,16

Monnaies des États-Unis d'Amérique.

MÉTAL.	DÉNOMINATION DES PIÈCES.	POIDS légal.	TITRE légal.	VALEURS.
OR	Pièce de 20 dollars ou double aigle (1849).	gr. 33,435	0,900	fr. 103,64
	Pièce de 10 dollars ou aigle (1837).	16,717	0,900	51,82
	De 5 dollars ou 1/2 aigle.	8,358	0,900	25,91
	De 2 1/2 doll. ou 1/4 aigle.	4,179	0,900	12,95
	De 1 dollar.	1,671	0,900	5,18
ARGENT	Dollar.	26,729	0,900	5,34
	Demi-dollar.	13,364	0,900	2,67
	Quart de dollar.	6,682	0,900	1,33
	One dime (1 dime).	2,672	0,900	0,53
	Half dime (1/2 dime).	1,336	0,900	0,26

Mesures autrichiennes (Vienne)

COMPARÉES AUX NOUVELLES MESURES FRANÇAISES.

Mesures de longueur.

Ligne (1/12 de pouce).	0,2194 centimètre.
Pouce (1/10 de viertel)	0,2633 décimètre.
Pied de Vienne	0,3161 mètre.
Toise (6 pieds).	0,8966 mètre.
Aune de Vienne.	0,7792 mètre.
Mille d'Autriche (400 toises)	7586 mètres.

Mesure de superficie.

Arpent ou joch (carré de 40 toises de côté). .	57,55 ares.

Mesures de capacité.

Seitel (1/4 de maas, mesure pour les liquides).	0,354 litre.
Maas (1/10 de viertel)	1,415 litre.
Viertel (1/4 d'eimer).	14,15 litres.
Eimer	56,6 litres.
Fuder (32 eimers).	1811,2 litres.
Becker (1/4 de fudermassel, mes. pour les solid.)	0,218 litre.
Fudermassel (1/2 muthmassel).	1,672 litre.
Muthmassel (1/2 achtel)	3,344 litres.
Achtel (1/2 viertel).	7,6387 litres.
Viertel (1/2 de metze).	15,375 litres.
Metze	61,5 litres.
Muth (30 metze)	1845 litres.

Poids.

Pfenning (1/4 de quintin).	1,094 gramme.
Quintin (1/4 de loth)	4,375 grammes.
Loth (1/4 d'once)	17,5 grammes.
Once (1/8 de livre)	70 grammes.
Livre de Vienne.	560 grammes

Monnaies.

MÉTAL.	DÉNOMINATION DES PIÈCES.	POIDS légal.	TITRE légal.	VALEUR.
		gram.		fr.
OR.	Ducat de l'empereur. . .	3,490	0,986	11,85
	Ducat de Hongrie. . . .	3,491	0,984	11,91
	Souverain	5,567	0,917	17,58
	Demi-souverain.	2,783	0,917	8,79
ARGENT.	Écu ou risdale de convention depuis 1753. . .	28,064	0,833	5,19
	Demi-risdale ou florin. .	14,532	0,833	2,60
	Vingt kreutzers	6,639	0,581	0,86
	Dix kreutzers	3,898	0,50	0,43

Mesures prussiennes (depuis 1816)

COMPARÉES AUX NOUVELLES MESURES FRANÇAISES.

Mesures de longueur.

Pouce (1/12 du pied).	0,2615446 décimètre.
Pied du Rhin ou de Leyde.	0,3138536 mètre.
Toise (6 pieds).	1,8831216 mètre.
Ruthe (perche de 12 pieds).	3,7662432 mètres.
Toise des mineurs (6 pieds 8 pouces). . . .	2,0923573 mètres.
Aune (25,5 pouces).	0,666938 mètre.
Mille (2000 perches)	7532,49 mètres.

Mesure de superficie.

Arpent ou morgen (180 perches carrées) . .	25,53 ares.

Mesures de capacité.

Viertel (quart)	1,148 litre.
Metze (3 viertels)	3,445 litres.
Scheffel (16 metze).	54,960 litres.
Tonneau (4 scheffel).	219,820 litres.
Maas (1/30 anker).	1,145 litre.
Anker (1/2 eimer)	34,35 litres.
Eimer (mesure pour liquides).	68,7 litres.
Ohm (2 eimers).	137,4 litres.
Oxhoft (3 eimers).	206,1 litres.
Tonneau des liquides (37 metze 1/2).	128,76 litres.

Poids.

Quintin (1/4 de loth)	3,65359 grammes.
Loth (1/32 de livre).	14,61437 grammes.
Marc (1/2 livre).	233,83 grammes.
Livre de Cologne.	467,66 grammes.
Quintal (100 livres).	46,766 kilogrammes.
Last maritime (4000 livres).	1870,64 kilogrammes.

Monnaies.

MÉTAL.	DÉNOMINATION DES PIÈCES.	POIDS légal.	TITRE légal.	VALEUR.
		gram.		fr.
OR. . . .	Ducat fin.	3,490	0,986	11,85
	Frédéric	6,682	0,903	20,78
	Demi-Frédéric	3,341	0,903	10,39
ARGENT. .	Risdale ou thaler de 30 silbergros (1823)	22,272	0,750	3,71
	Pièce de 5 silbergros .	3,712	0,750	0,61
	Silbergros (valeur intrinsèque).	2,192	0,082	0,11

CONVERSIONS DE MESURES.

247. 1° *Une grandeur étant exprimée à l'aide des anciennes mesures françaises, ou des mesures usitées dans un pays étranger, l'exprimer en mesures nouvelles françaises.*

2° Réciproquement, *une grandeur étant exprimée en nouvelles unités françaises, l'exprimer en anciennes unités françaises ou en unités usitées dans un pays étranger.*

Les tableaux qui précèdent servent à résoudre ces deux questions.

1er exemple. Convertir $53^{\text{toises}}\,3^{\text{pieds}}\,7^{\text{pouces}}\,5^{\text{lignes}}$ *en mètres.*

Prenons les tableaux; on y trouve :

$1^{\text{toise}} = 1^{\text{m}},94904$, donc $53^{\text{tois.}} = 1^{\text{m}},94904 \times 53 = 103^{\text{m}},29912$
$1^{\text{pied}} = 0^{\text{m}},32484$, $\quad 3^{\text{pied}} = 0^{\text{m}},32484 \times 3 = 0^{\text{m}},97452$
$1^{\text{pou.}} = 0^{\text{m}},02707$, $\quad 7^{\text{pou.}} = 0^{\text{m}},02707 \times 7 = 0^{\text{m}},18949$
$1^{\text{ligne}} = 0^{\text{m}},002256$, $\quad 5^{\text{lign.}} = 0^{\text{m}},002256 \times 5 = 0^{\text{m}},01128$

Additionnons; $\quad 53^{\text{toises}}\,3^{\text{pieds}}\,7^{\text{pouc.}}\,5^{\text{lignes}} = 104^{\text{m}},47441$ (*)

Autre méthode. Une seule multiplication, effectuée par la méthode abrégée (201), peut donner le résultat demandé, à moins d'une unité d'un ordre décimal donné.

Convertir $53^{\text{to}}\,3^{\text{pi}}\,7^{\text{po}}\,5^{\text{li}}$ en mètres, à $0^{\text{m}},001$ près.

$1^{\text{toise}} = 1^{\text{m}},94904$, ou plus exactement, $1^{\text{to}} = 1^{\text{m}},9490365912$.

Si $53^{\text{to}}\,3^{\text{pi}}\,7^{\text{po}}\,5^{\text{li}}$ était un nombre décimal de toises, on poserait ainsi la multiplication abrégée :

$1^{\text{m}},9490\ 365912$
. . . . .,35

(*) Dans les questions de ce genre, le nombre cherché est ordinairement demandé à moins d'une unité décimale d'un ordre donné. Par exemple, on peut demander de calculer la longueur précédente en mètres à moins de $0^{\text{m}},001$. On choisit alors le nombre des chiffres décimaux de chacune des autres valeurs susdites des unités anciennes de manière que, tout calcul fait, le résultat soit obtenu avec l'approximation demandée. (V. les exercices sur les approximations.)

Il est donc nécessaire de connaître 5 décimales du nombre décimal de toises. Cherchons-les :

$$3^{pi}\,7^{po} = 43^{po}; \quad 43^{po}\,5^{li} = 521^{li}; \quad 1^{toi} = 864^{li};$$

$$1^{li} = \frac{1^{toi}}{864} \quad \text{et} \quad 521^{li} = \frac{521^{toi}}{864} = 0^{to},60300\ldots$$

$$53^{to}\,3^{pi}\,7^{po}\,5^{li} = 53^{to},60300\ldots$$

Nous avons à faire cette multiplication.

```
 1,9490 365912
 0 0306,35
 ------------
 9,745180
    584709
    116940
       582
 ---------
 104,47411
```

On trouve $104^{m},474$ pour la valeur cherchée, à moins de $0^{m},001$ par défaut (*).

Problème inverse. *Convertir* $104^{m},474$ *en toises, pieds, pouces, lignes.*

Prenons les tableaux :

$$1^{to} = 1^{m},94504 = 1^{m} \times 1,94904; \quad \text{d'où} \quad 1^{m} = \frac{1^{to}}{1,94904}.$$

donc $$104^{m},474 = \frac{104^{to},474}{1,94904} = \frac{10447400^{toises}}{194904}.$$

Nous effectuons cette division :

(*) Nous prenons 104,74 et non 104,75, parce que nous voyons tout de suite que si nous ajoutions à 104,47411 la limite supérieure de l'erreur, (5 + 3 + 6 + 3) cent millièmes, le chiffre 4 des millièmes ne changerait pas. (204)

$$\begin{array}{r|l} 10447400^{to} & 194904 \\ \cline{2-2} .702200 & 53^{to}\,3^{pi}\,7^{po}\,4^{li} \\ 117488 & \\ 6 & \\ \hline 704928^{pi} & \\ 120216 & \\ 12 & \\ \hline 240432 & \\ 120216 & \\ \hline 1442592^{po} & \\ 78264 & \\ 12 & \\ \hline 156528^{li} & \\ 78264 & \\ \hline 939168 & \\ 159552 & \end{array}$$

Arrivé au reste, moindre que le diviseur, lequel est un nombre de toises, nous l'avons réduit en pieds, en le multipliant par 6, puis nous avons divisé; nous avons réduit le 2e reste en pouces, en multipliant par 12, et ainsi de suite.

Convertir 1 mètre en pieds, pouces, lignes.

Prenez plus haut la valeur du mètre :

$$1^{to} = 1^{m},94904 \,;\quad 1^{mèt.} = \frac{1^{to}}{1,94904} = \frac{100000^{to}}{194904}\,;$$

puis effectuez la division en suivant la marche précédente :

$$1^{m} = 0^{to}\,3^{pi}\,0^{po}\,11^{li},296.$$

2e Exemple. *Convertir* $29^{livres}\,1^{marc}\,3^{onces}\,5^{gros}$ en kilogrammes.

Prenons les tableaux :

$1^{livre} = 0^{kil.},48951$;	$29^{livr.} = 0^{kil.},48951 \times 29 =$	$14^{kil.},19579$
	$1^{marc} =$	$0^{kil.},24475$
$1^{once} = 0^{kil.},03059$;	$3^{onc.} = 0^{kil.},03059 \times 3 =$	$0^{kil.},09177$
$1^{gros} = 0^{kil.},003824$;	$5^{gros} = 0^{kil.},003824 \times 5 =$	$0^{kil.},01912$
	$29^{liv.}\,1^{marc}\,3^{onces}\,5^{gros}$	$14^{kil.},55143$

2° *méthode. Multiplication abrégée.* On demande la valeur de $29^{liv.}\,1^{marc}\,3^{onces}\,5^{gros}$ en kilogrammes, *à moins de* 1^{gramme}, ou $0^{kil.},001$.

$1^{liv.} = 0,48950$, ou plus exactement, $1^{liv.} = 0^{kil.},489505847$.

Si le nombre de livres était un nombre décimal, on poserait ainsi la multiplication :

$$\begin{array}{r} 0^{kil.},4895\ 05847 \\ \ldots.,92 \\ \hline \end{array}$$

Il faut connaître 4 décimales du nombre décimal de livres.

$1^{m}3^{onces} = 11^{onces}$; $11^{onces}\,5^{gros} = 93^{gros}$; et $1^{liv.} = 128^{gros}$.

$$\text{Donc, } 1^{m}3^{onces}\,5^{gros} = \frac{93^{liv.}}{128} = 0^{liv.},7265\ldots$$

Mettant ces décimales à leurs places, on fait cette multiplication abrégée :

$$\begin{array}{r} 0^{kil.},4895\ 05847 \\ 5627,92 \\ \hline 979010 \\ 440550 \\ 34265 \\ 978 \\ 288 \\ 20 \\ \hline 14^{kil.},551xx \end{array}$$

On trouve $14^{kil.},551$ pour la valeur demandée à moins de 0,001, par défaut (201).

PROBLÈME INVERSE. *Convertir* $14^{kil.},551$ *en livres, marcs, onces, gros.*

Prenons les tableaux :

$$1^{liv.} = 0^{kil.},48951 = 1^{kil.} \times 0,48951 \text{ ; donc } 1^{kil.} = \frac{1^{liv.}}{1,48951},$$

et
$$14^{kil.},551 = \frac{14^{liv.},551}{0,48591} = \frac{1455100^{liv.}}{48591}.$$

Faisons cette division :

```
1455100liv. | 48951
 476080     | 29liv. — 1marc 3onces 4gros
  35521
      2
 ---------
  71042marcs
  22091
      8
 ---------
 176728onces
  29875
      8
 ---------
 239000gros
  43196
```

On a réduit les restes successifs en marcs, onces, gros, puis on a divisé.

3° Exemple. *Convertir* 5432fr.,84c. *en livres, sous, deniers.*

Prenons les tableaux $1^{\text{fr.}} = \frac{81^{\text{liv.}}}{80} = 1^{\text{liv.}} + \frac{1}{80}$.

De là cette multiplication :

```
   1liv.  1/80
   5432,84
 -----------
  5432l.,84
     67,91
 -----------
  5500l.,75
        20
 -----------
    15s.,00
```

Pour multiplier $\frac{1}{80}$ par 5432,84, ou, ce qui est la même chose, 5432,84 par $\frac{1}{80}$, nous avons, par la pensée, reculé la virgule d'une place vers la gauche ; ce qui donne 543,284 = 1/10 de 5432,84 ; puis nous avons pris le 1/8, ce qui a donné 67,91 pour 1/80 de

5432,84; nous avons eu $5500^{\text{liv.}},75$; puis nous avons réduit la partie décimale $0^{\text{liv.}},75$ en sous, en multipliant par 20; (0,75 de $1^{\text{liv.}} = 0,75$ de $20^{\text{s.}} = 20^{\text{s.}} \times 0,75$).

PROBLÈME INVERSE. Convertir $379^{\#}\,13^{\text{s.}}\,8^{\text{d.}}$ en francs, décimes, centimes.

On raisonne ainsi : $1^{\text{fr.}} = 1^{\#} + \frac{1}{80}$; or $1^{\#} = 12^{\text{d.}} \times 20 = 240^{\text{den.}}$

$\frac{1^{\#}}{80} = \frac{240^{\text{d.}}}{80} = 3^{\text{d.}}$; donc $1^{\text{fr.}} = 240^{\text{d.}} + 3^{\text{d.}} = 243^{\text{d.}}$; donc $1^{\text{d.}} = \frac{1^{\text{fr.}}}{243}$.

Nous réduirons $579^{\#}\,13^{\text{s.}}\,8^{\text{d.}}$ en deniers; puis nous diviserons le nombre trouvé par 243; $91124^{\text{den.}} = \frac{91124^{\text{fr.}}}{243}$.

$$
\begin{array}{r|l}
379^{\#}\,13^{\text{s.}}\,8^{\text{d.}} & \\
20 & \\
\hline
7593^{\text{s.}} & \\
12 & \\
\hline
15186^{\text{d.}} & \\
7593 & \\
8 & 243 \\
\hline
91124 & 375^{\text{fr.}},03.
\end{array}
$$

La division effectuée jusqu'au chiffre des centièmes, on trouve $375^{\text{fr.}}03$.

4ᵉ EX. : MESURES ÉTRANGÈRES. *Convertir* $79^{\text{gallons}}\,5/6$ *en litres.*

Prenons les tableaux : $1^{\text{gallon}} = 4^{\text{lit.}},54345797$.

Il n'y aura qu'à multiplier

$$
\begin{array}{lr}
 & 4^{\text{lit.}},54345797 \\
 & 79 \quad 5/6 \\
\hline
 & 4089112173 \\
 & 3180420579 \\
\frac{3}{6} & 227172898 \\
\frac{2}{6} & 151448599 \\
\hline
 & 362,71939460
\end{array}
$$

Réponse. $362^{\text{lit.}},72^{\text{centil.}}$, à moins de $0^{\text{lit.}},01$.

Il est évident que si le résultat était demandé d'abord, à moins de $0^{lit.},01$, par exemple, on ne prendrait pas autant de décimales dans le tableau.

Problème inverse. Convertir $362^{lit.},719$ en gallons.

On prend le tableau :

$$1^{gallon} = 4^{lit.},54345797 = 1^{lit.} \times 4,54345797;$$

donc $$1^{lit.} = \frac{1^{gallon}}{4,54345797} \text{ et } 362^{lit.},719 = \frac{362^{gal.},719}{4,54345797}.$$

On pourra employer le procédé de division abrégée.

Nous n'ajouterons pas d'autres exemples. Évidemment ce sera toujours la même méthode, si on se sert des tableaux; multiplication pour passer des mesures étrangères aux mesures françaises, et division dans le cas contraire. Voyez aux Exercices, page 186, d'autres exemples. Plus tard, aux changes, règle conjointe ou d'arbitrage, nous ferons encore des conversions de mesures de divers pays.

Mesure du temps.

248. Le temps employé par la terre pour exécuter une révolution complète autour de son axe, est ce qu'on nomme un *jour*.

Le jour se subdivise en 24 *heures;* l'heure en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes*, et quelquefois la seconde en 60 *tierces.*

Les heures, minutes, secondes, tierces, se représentent par les initiales *h. m. s. t.*; exemple : $3^{heures}\,21^{minutes}\,53^{secondes}\,19^{tierces}$ se représentent ainsi :

$$3^h 21^m 53^s 19^t.$$

La *seconde* est l'unité de temps pour les physiciens et les astronomes. On fait rarement usage de la tierce; un intervalle moindre qu'une seconde s'évalue en fraction décimale de la seconde.

Le temps employé par la terre pour faire une révolution complète autour du soleil est une année solaire ou tropique; cette année se compose d'environ $365^j\ 1/4$.

L'année *commune* ou *civile* est de 365 jours seulement; pour retrouver ce quart de jour, on est convenu que chaque quatrième

année civile serait de 366 jours; cette quatrième année s'appelle année *bissextile* (*).

L'année se subdivise en 12 mois : *janvier*, *février*, *mars*, *avril*, *mai*, *juin*, *juillet*, *août*, *septembre*, *octobre*, *novembre*, *décembre.*

Janvier, mars, mai, juillet, août, octobre, décembre ont 31 jours; avril, juin, septembre, novembre ont 30 jours; février en a 28 dans les années ordinaires, et 29 dans les années bissextiles.

Division de la circonférence.

249. La circonférence se divise en 360 parties égales qu'on nomme *degrés*, le degré en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes*. Un arc moindre qu'une seconde s'exprime par une fraction décimale de la seconde.

Les degrés, minutes, secondes se désignent par ces notations abrégées : °, ', ''. Ainsi, un arc composé de 37degrés, 29minutes, 43secondes, 24 se représente ainsi :

37° 29' 43'',24.

Le quart de la circonférence s'appelle un *quadrant*.

A l'époque de l'établissement du système métrique, on divisa le quadrant en 100 parties égales nommées *grades*; chaque grade en 100 *minutes*, et chaque minute en 100 *secondes*.

De sorte qu'un arc pourrait toujours s'exprimer par un nombre décimal de grades. Ex. 19grades, 37', 87'' pouvait s'écrire : 19grades, 3787; mais cette nouvelle division de la circonférence n'a pas prévalu.

Les nombres tels que: 19# 15s. 8d.; 27j., 19h., 43m., 15s. ; 76° 38' 42'' sont ce qu'on appelle des *nombres complexes*. Le calcul des grandeurs mesurées avec les anciennes unités se faisait sur de

---

(*) Il s'en faut de 1/120 de jour, à peu près, que l'année solaire soit de 365j 1/4; de sorte qu'en l'évaluant ainsi, il y a erreur d'un jour, en trop, au bout de 120 ans. Pour compenser cette erreur, on retranche 3 jours de chaque période de 400 ans, en convenant que les années, dont le millésime est le produit de 100 par un nombre non divisible par 4, ne seraient pas bissextiles. 1700, 1800 1900 ne sont pas bissextiles; 2000 le sera.

pareils nombres. Basé sur la subordination très-peu régulière de chaque unité et de ses subdivisions, les unes par rapport aux autres, ce calcul était plus compliqué que celui des nombres décimaux. Il n'y a plus à s'en occuper aujourd'hui, si ce n'est à propos du temps et des arcs. Voici, à ce sujet, quelques exemples des opérations les plus ordinaires :

Addition.

1er Ex.

27j.,	7h.,	24m.,	37s.
9	8	43	53
37	18	31	42
0	13	19	52
75j.,	00h.,	00m.,	4s.

2e Ex. :

37°	28′	43″
19	31	41
24	7	39
0	43	17
81°	51′	20″

1er Ex. : Commençant par les secondes, on trouve, 1re colonne. 14 ; on pose 4 et on retient 1 ; 2e colonne, 18 ; 18 dizaines de secondes égalent 3 fois 6 dizaines de secondes, ou 3 minutes ; on pose 0, et on retient 3 minutes, etc.

2e Ex. ; 1re colonne des secondes, 20, on pose 0 et on retient 2 ; 2e colonne, 14 ; en 14 dizaines de secondes, il y a 2 fois 6 dizaines de secondes ou 2 minutes, et 2 dizaines de secondes de plus ; on pose les 2 dizaines de secondes et on retient 2, etc.

De cette manière, on est dispensé d'écrire les nombres de secondes ou de minutes obtenues pour sommes pour les diviser par 60.

Soustraction.

1er Ex. :

19j.,	18h.,	14m.
7	12	37
12j.,	5h.,	37m.,

2e Ex. :

24°	19′	42″
13	37	24
10°	42′	18″

Même simplification. Ainsi, 1er ex. : on dit : 7 ôtés de 14, il reste 7 ; 1 et 3, 4 ; ôter 4 de 1 ne se peut ; on ôte 4 de 7, en augmentant 1 de 6 dizaines de minutes ; 4 de 7, il reste 3 ; puis on continue aux heures : 1 et 2, 3 ; 3 ôtés de 8, il reste 5, etc.

La multiplication est une opération plus compliquée, à moins que le multiplicateur n'ait qu'un seul chiffre ; dans ce cas, on opère comme pour l'addition.

$$\begin{array}{r} 19^\circ\ \ 37'\ \ 43'' \\ 7 \\ \hline 137^\circ\ \ 24'\ \ 01'' \end{array}$$

7 fois 3, 21 ; je pose 1 et retiens 2 ; 7 fois 4, 28 ; 28 et 2, 30 ; 30 dizaines de secondes égalent justement 5 minutes ; on pose 0 et on retient 5 minutes, etc.

Si, au lieu de 7, on avait le multiplicateur 39, par exemple, on multiplierait 43 par 39 ; on diviserait le produit par 60 ; on écrirait le reste aux secondes, et on garderait le quotient comme nombre de minutes pour l'ajouter au produit de 37′ par 39, qu'on divise de même par 60, etc.

On pourrait ramener le calcul des nombres complexes à celui des nombres entiers, en réduisant chaque nombre en unités de sa plus petite espèce ; mais ce ne serait pas le plus court.

Pour la division d'un nombre complexe par un nombre abstrait, on opère d'une manière analogue, mais en allant de droite à gauche. *V.* les exemples de conversion (toises ou livres, n° 247).

Nous allons traiter comme exercice sur ces dernières notions (temps et arcs), une double question qui revient très-fréquemment dans l'astronomie et la navigation. (Cosmographie.)

EXERCICES.

250. Dans le mouvement apparent de la sphère céleste autour de l'axe du monde, chaque étoile parcourt, d'un mouvement uniforme, les 360° de son cercle diurne en 24 heures sidérales.

Ce qui fait En 1^h ou 60^m. . . . 15°.

En 1^m ou 60^s . . . . $\frac{15^\circ}{60} = \frac{1^\circ}{4} = 15'$.

En 1^s ou 60^{t} . . . . $\frac{15'}{60} = \frac{1'}{4} = 15''$.

En 1^t . . . . $\frac{15''}{60} = \frac{1''}{4}$ ou $15'''$.

1re QUESTION. *Conversion du temps en degrés.*

On demande le nombre de degrés parcouru par une étoile en $7^h\ 37^m\ 43^s$.
Voici le calcul que nous expliquerons :

	7^h	37^m	43^s.
	60		
	457		
	114°	$15'$	
		10	$45''$
Réponse.	114°	$25'$	$45''$.

Nous avons réduit $7^h\ 37^m$ en minutes, en multipliant 7 par 60, et ajoutant 37 (disant : 0 mais 7 c'est 7 ; 6 fois 7, 42, et 3, 45).

Nous avons divisé 457 par 4 ; le quotient est $114^\circ \frac{1}{4}$; $\frac{1^\circ}{4}$ a été remplacé par $15'$. (En 1^m, l'étoile parcourt $\frac{1^\circ}{4}$; en $457'$, $\frac{457^\circ}{4} = 114^\circ + \frac{1^\circ}{4} = 114^\circ\ 15'$. Enfin, nous avons divisé 43 par 4, ce qui a donné $10' + \frac{3'}{4}$, ou $10'\ 45''$. (En 1^s, l'étoile parcourt $\frac{1'}{4}$; en 43^s, $\frac{43'}{4} = 10'\ \frac{3}{4} = 10'\ 45''$.

2e QUESTION. *Conversion des degrés en temps.*

Ex. *En combien de temps une étoile parcourt-elle* $114^\circ\ 25'\ 49''$ *de son cercle diurne?*

Voici le calcul que nous expliquerons :

	114°	$25'$	$49''$
			4
7^h	37^m	53^s	16^t.

(4 fois 9, 36 ; en 36 on pose 6 et on retient 3 ; 4 fois 4, 16, et 3, 19 ; en 19 il y a trois fois 6 dizaines de tierces, ou 3^s et 1 dizaine ; on pose 1 dizaine et on retient les 3^s ; 4 fois 5, 20 et 3, 23 ; en 23 on pose 3 et on retient 2 ; 4 fois 2, 8, et 3, 11 ; en 11 dizaines de secondes il y a 1 fois 6 dizaines de seconde ou 1^m, et 5 dizaines de secondes ; on pose les 5 dizaines et on retient 1^m ; 4 fois 4, 16, et 1, 17 ; on pose 7 et on retient 1 ; 4 fois 11, 44, et 1, 45 ; en 45 dizaines de minutes, il y a 7 fois 6 dizaines de minutes, ou 7^h, et 3 dizaines de minutes ; on pose ces trois dizaines, et un peu plus à gauche les 7^h.

Quant au raisonnement, rien de plus simple. En 1^{t} l'étoile parcourt $\frac{1''}{4}$ (V. plus haut) ; $1''$ est donc parcouru en 4 tierces, et $49''$ en 4×49 ; c'est pourquoi nous avons multiplié 49 par 4 et regardé le produit comme un nombre de tier-

ces de temps dont nous avons extrait les secondes; puis de même en 1s l'étoile parcourt $\frac{1'}{4}$; 1' sera parcourue en 4s et 25' en (4 × 25) s; de là notre multiplication de 25 par 4, qui a donné des secondes; de même en 1', $\frac{1^{\circ}}{4}$; 1° est parcouru en 4m, et 114° en (114 × 4)m, dont nous avons extrait les heures (*).

EXERCICES SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX ET LE SYSTÈME MÉTRIQUE.

251. Un marchand livre 334 pièces de calicot à 47 fr. 20; 22 à 23 fr. 45; 24 mètres à 1 fr. 50; 41 à 1 fr. 25, et 18 à 1 fr. 75. Combien doit-il recevoir? *Rép.* 16399 fr. 45.

Un épicier a acheté 44 hectolitres d'huiles à 0 fr. 75 le litre; 66,25 kilog. de sucre à 1 fr. 75; 15,520 kilog. de poivre à 3 fr. 75; il a revendu l'huile 0 fr. 90 le litre; le sucre 1 fr. 95 le kilog.; le poivre 0 fr. 45 l'hectogramme. Combien a-t-il gagné? *Rép.* 684,89.

On reçoit un bateau chargé de 80 pièces de vin contenant chacune 120 litres; chaque pièce coûte 50 fr. d'achat, 6 fr. de port, 30 fr. 45 c. d'entrée, 7 fr. 45 de commission et 1 fr. 75 d'encavement. Si on vend le litre 0 fr. 95, quel sera le profit net, et quel est le poids du chargement, si l'hectolitre de vin pèse 98 kilog. 150, et chaque fût 25 kilogrammes? *Rép.* 1468 fr. de profit et 11422 kilog. 4 hect. de chargement.

On a lambrissé un appartement qui renferme les superficies suivantes : 1° 4 mètres carrés, 12 décim. car., 4 centim. car.; 2° 8 mèt. car., 14 décim. car., 2 centim. car.; 3° 9 mèt. car., 4 décim. car., 5 centim. car.; et 4° 7 mèt. car., 3 décim. car., 40 centim. car. : dire 1° le total de ces 4 parties de lambris, et 2° ce qui est dû à l'ouvrier, si le mètre carré coûte 5 fr. 75 c. *Rép.* Total 28 mèt. car., 33 décim. car., 61 centim. 2° Il est dû 162 fr. 93 c.

Convertir en francs une somme de 30 souverains d'or anglais, 3 crowns et 13 shillings. V. les tableaux. *Rép.* 788,81 fr.

Convertir en francs une somme de 13 ducats, 2 thalers, 7 silbergros, monnaie de Prusse (V. les tableaux). *Rép.* 162,24 fr.

Le poids brut d'un baril rempli de pièces de monnaie est de 120 kilogrammes 734 grammes; le fût pèse 6,5786 kilog.; les pièces de 5 francs pèsent 80,625 kil.; les pièces de 2 fr. sont au nombre de 2000; celles de 1 fr. au nombre de 1000; celles de bronze pèsent 3 kilog. 800 gram.; le reste est en pièces d'or de 20 fr. Combien y a-t-il de pièces de 5 fr. et de pièces de 20 fr.? *Rép.* 2201 pièces de 5 fr. et 4790 de 20 fr.

Un vase rempli d'eau pèse 45,25 kilog.; quelle est la capacité en décimètres cubes, sachant que le vase vide pèse 6,15 kilog. *Rép.* 39 décim. cubes 10 centim. cubes.

(*) Nous avons cru utile de faire connaître la solution la plus simple de ces deux questions extrêmement usuelles.

Un fil de fer de 18 mètres de long doit être employé à faire des pointes; chaque pointe a 3, 25 centim. de longueur; combien ce fil fournira-t-il de douzaines de pointes? *Rép*. 46.

Un sac qui pèse net 218 grammes 50 contient le plus grand nombre possible de pièces de 5 fr., puis de 2 fr., de 1 fr., de 0 fr. 50, enfin de 0 fr. 20. Quel est le nombre de pièces de chaque valeur? 8 de 5 fr.; 1 de 1 fr., 1 de 0,50; 1 de 0,20.

La pesanteur spécifique ou la densité d'un corps exprime le nombre de grammes que pèse dans le vide 1 centimètre cube de la matière qui compose ce corps.

La densité de l'eau de mer est 1,0263; quel est le poids de l'eau de mer contenue dans un tonneau de 3 hect. 45 litres 45? *Rép*. 354,535 kilog. (*).

La densité du fer fondu est 7,788; quel est en centimètres cubes le volume d'un boulet pesant 24 kilog.? *Rép*. 3081,66 centim. cubes.

Sous un égal volume, l'eau pèse 770 fois plus que l'air, à la température de 4° et sous la pression ordinaire; on demande le poids d'un litre d'air (1 décimètre cube). *Rép*. 1,298701 gr.

La densité du cuivre est 8, 85; celle du platine est 21,53. Tout corps perd dans l'air une partie de son poids égale au poids de l'air qu'il déplace; on demande ce que pèse un kilogramme de cuivre dans l'air, ainsi qu'un kilogramme de platine. *Rép*. cuivre, 999,853 gr.; platine, 999,94 gr.

Un litre d'eau à 4 degrés pèse 1 kilog.; quel sera le poids d'un litre de ce liquide à 20 degrés, sachant que son volume devient 1,00175 fois plus grand qu'à 4 degrés, *Rép*. 0^k,998 gr.

Quel est le poids d'un litre d'eau à 30 degrés, sachant que son volume est alors 1,00437 fois plus grand qu'à 4 degrés. *Rép*. 0^k,995 gr.

La monnaie d'or, à valeur égale, pèse 15, 5 fois moins, et celle du bronze 20 fois plus que celle d'argent. Que pèsent 1000 fr. en or? Combien faut-il de pièces de 20 fr. pour faire le poids d'un kilogramme? Que pèsent 125 fr. de bronze? *Rép*. 1° 322,58 gr.; 2° 155; 3° 12 × 5.

Combien y a-t-il de cuivre allié à l'or pur dans 6840 fr. en or? 220,64 gr.

Combien y a-t-il d'or pur dans 485 pièces de 40 fr.? *Rép*. 5,6523 kil. (**).

Combien y a-t-il d'argent pur dans un sac renfermant 275 pièces de 5 fr., 537 pièces de 2 fr. et 896 de 1 fr.? *Rép*. 15,0525 kil.

Le diamètre d'une pièce de 5 fr. est 37 millimètres; le budget des dépenses de 1845 se montait à 1372538140 fr.; évaluer en lieues de 4 kilomètres la longueur d'une suite de pièces de 5 fr. équivalant à ce budget, ces pièces étant placées à la file et au contact les unes des autres. Quelle serait en lieues la hauteur d'une pile composée des mêmes pièces, sachant que chacune a 0^m,0025 d'épaisseur. *Rép*. longueur 2249, 2 lieues; hauteur, 171,58 lieues.

Combien faudrait-il de mulets pour porter ce budget en chargeant chaque mulet de 225 kilog. *Rép*. 30500.

Évaluer en centimes la tolérance de poids : 1° sur les diverses pièces d'argent; 2° sur les pièces d'or (V. page 163) tolér. sur la pièce de 20 fr.; 0,013 gr.

Depuis le 1er juillet 1835, la loi fixe à 6 fr. le prix de fabrication, déchets compris, d'un kilogramme d'or monnayé (au titre de 0,900). Depuis le 1er oc-

---

(*) V. à la fin de l'ouvrage les problèmes résolus. —(**) V. la note p. 188.

tobre 1849, la loi a fixé de même à 1 fr. 50 c. le prix de fabrication d'un kilog. d'argent monnayé (au titre de 0,900).

Les espèces monnayées de tous les pays et les matières d'or et d'argent ne sont reçues qu'au poids dans les changes des hôtels des monnaies; le poids et le titre servent à déterminer la valeur absolue ou intrinsèque de ces matières; de cette valeur, on déduit les frais de fabrication calculés suivant le poids du métal pur et aux taux indiqués ci-dessus; la différence est la valeur nominale, c'est-à-dire la valeur en monnaies françaises des monnaies ou matières présentées au change (*).

Tarif du 1er octobre 1849.

		Valeur intrinsèque.	Valeur nominale (au change).
1 kilog. d'or non monnayé	pur	3444f,44c	3437f,78c
	à 0,900	3100	3094
1 kilog. d'argent non monnayé	pur	222f,22c	220f,56c
	à 0,900	200	198 ,50

Combien valent au change des monnaies 517,25 grammes d'or au titre de 0,984. *Rép.* 1753,11 fr.

Combien valent 1387,20 grammes d'argent au titre de 0,876. *Rép.* 270,04 fr.

La loi reconnaît deux titres pour les ouvrages d'argent, et 3 pour les ouvrages d'or; elle tolère 5 millièmes d'erreur pour les premiers, et 3 millièmes pour les seconds. Le 1er titre de l'argent est 0, 950, et le 2e, 0,800. Le 1er titre de l'or est 0,900; le 2e, 0,840; le 3e, 0,750. Cela posé, résoudre les questions suivantes :

Combien y a-t-il d'argent pur dans 2 kilog. 456 gram. d'argent au 1er titre; combien vaut cet argent au change des monnaies? *Rép.* 2,333 kil.; 518,48 fr.

Combien y a-t-il d'argent pur dans 45, 56 kilog. d'argent au 2e titre ; valeur de cet argent au change des monnaies? *Rép.* 36,448 kil.; 8099 fr. 47 c.

Combien y a-t-il d'or pur dans 84 grammes d'or pur au 1er titre; valeur de cet or au change des monnaies? *Rép.* 75,6 gr.; 260,366 fr.

Combien payerait-on au change des monnaies une cuiller d'or au second titre pesant 115,74 grammes. *Rép.* 334,83 fr.

Combien payerait-on au change des monnaies un vase d'or au 3e titre pesant 582,830 grammes. *Rép.* 1505,45 fr.

Le contrôle des ouvrages d'argent est de 1 fr. par hectogramme d'argent; mais on ajoute le dixième en sus. Quel sera le prix de contrôle d'un vase d'argent pesant 2569 grammes. *Rép.* 28,26 fr.

Le contrôle des ouvrages d'or est de 20 fr., plus le dixième par hectogramme d'or. Quel sera donc le prix de contrôle d'un vase d'or pesant 567 grammes. *Rép.* 124,74 fr.

(*) Il s'est glissé une erreur dans la définition du titre d'un alliage, page 165. Le *titre* d'un alliage de métaux par rapport à un de ces métaux est le poids de la quantité de ce métal qui entre dans une unité de poids de l'alliage; ou bien, c'est le quotient du poids de la quantité de ce métal existant dans l'alliage par le poids total de l'alliage.

CHAPITRE IV.

EXTRACTION DES RACINES.

DES CARRÉS ET DE LA RACINE CARRÉE.

252. Le CARRÉ *est la deuxième puissance d'un nombre ou le produit de ce nombre par lui-même.* Ex. : Le carré de 6 est 6×6 ou 36.

Un carré s'indique aussi 6^2.

La RACINE CARRÉE *d'un nombre est le nombre qui élevé au carré reproduit le nombre proposé.* Ex. : La racine de 36 est 6; celle de $\frac{9}{16}$ est $\frac{3}{4}$.

Une racine carrée s'indique ainsi : $\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{9}{16}}$.

On a coutume, par abréviation, d'appeler *carré parfait* tout nombre qui est le carré d'un nombre entier ou d'un nombre fractionnaire.

Il faut savoir par cœur les carrés des dix premiers nombres. Les voici :

Nombres :	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Carrés :	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.

Composition du carré de la somme de 2 nombres.

253. *Le carré de la somme de deux nombres se compose du carré du premier nombre, plus deux fois le produit du premier nombre par le second, plus le carré du second.*

Ex. : $347 = 340 + 7$. Faisons le carré d'après la définition ;

$$\begin{array}{r} 340 + 7 \\ 340 + 7 \\ \hline 340^2 + 340 \times 7 \\ + 340 \times 7 + 7^2 \\ \hline (340+7)^2 = 340^2 + 2 \times 340 \times 7 + 7^2. \end{array}$$

Ce qui démontre la proposition.

Nous avons d'abord multiplié $340 + 7$ par 340 ; ce qui a donné 340×340 ou 340^2, plus 7×340 ou 340×7 ; puis nous avons multiplié $340 + 7$ par 7, ce qui a donné 340×7, plus 7×7 ou 7^2. Enfin nous avons additionné.

254. Corollaire. *Le carré d'un nombre entier décomposé en dizaines et en unités*, Ex. : $347 = 340 + 7$, *se compose du carré des dizaines, plus deux fois le produit des dizaines par les unités, plus le carré des unités.*

255. Effectuons le carré de 347 d'après cette composition.

$$\begin{array}{r} 340^2 = 115600 \\ 2 \times 340 \times 7 = 4760 \\ 7^2 = \quad 49 \\ \hline 120409 \end{array}$$

Remarque. *Le carré des dizaines* $(34 \times 10)^2$ *est un nombre exact de centaines ;* c'est le carré du *nombre* 34, des dizaines, suivi de 2 zéros ; le carré 1156 de 34 est entièrement contenu dans le nombre 1204 des centaines du carré.

256. Dans la colonne des unités simples, il n'y a que le chiffre, 9 qui termine le carré, 49, du chiffre 7 des unités simples du nombre proposé 347. Donc *le carré d'un nombre entier est toujours terminé par le même chiffre que le carré du chiffre de ses unités simples.*

A l'inspection des carrés des 10 premiers nombres, on voit qu'aucun de ces carrés n'est terminé par un des chiffres 2, 3, 7, 8. On conclut de là et de la dernière proposition *qu'un nombre entier terminé par un des chiffres* 2, 3, 7, 8, *n'est pas le carré d'un nombre entier.*

257. *La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale au double du plus petit nombre, plus 1.*

Ex. : 6 et 7; $7^2 = (6+1)^2 = 6^2 + 2 \times 6 \times 1 + 1$ (253).
D'où $7^2 - 6^2 = 2 \times 6 + 1$.

Entre 6^2 et 7^2 (36 et 49), il y a donc 12 nombres, 37, 38,... 48, dont aucun n'est le carré d'un nombre entier. Ex. : 42 n'est pas le carré d'un nombre entier; car le nombre entier qui aurait 42 pour carré devrait être compris entre 6 et 7.

En général, un nombre entier, n^2, qui est le carré d'un nombre entier, est immédiatement suivi de $2n$ nombres entiers dont aucun n'est le carré d'un nombre entier. La plupart des nombres entiers ne sont donc pas des carrés de nombres entiers.

258. *Tout nombre entier*, Ex. : 42, *qui n'est pas le carré d'un nombre entier, n'est pas non plus le carré d'un nombre fractionnaire.*

En effet, une fraction ou expression fractionnaire quelconque peut toujours être réduite à sa plus simple expression; or nous avons vu que chaque puissance d'une fraction irréductible est une autre fraction irréductible (150).

Ainsi donc, *quand la racine carrée d'un nombre entier, tel que 42, n'est pas un nombre entier, elle n'est pas non plus un nombre fractionnaire.*

$\sqrt{42}$ est ce qu'on appelle un nombre *incommensurable*, c'est-à-dire, qui n'a pas de commune mesure avec l'unité.

Une pareille racine ne peut être évaluée que par approximation.

259. *Le carré d'un produit est égal au produit des carrés de ses facteurs.* Ex. : $(3 \times 4 \times 5)^2 = 3 \times 4 \times 5 \times 3 \times 4 \times 5 = 3^2 \times 4^2 \times 5^2$.

Un nombre étant décomposé en ses facteurs premiers, on l'élève au carré en doublant l'exposant de chaque facteur premier.

Ex. : $1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$; $1080^2 = 2.\ 2.\ 2.\ 3.\ 3.\ 3.\ 5 \times 2.\ 2.\ 2.\ 3.\ 3.\ 3.\ 5$.

Dans 1080^2 il y a 2 fois autant de facteurs 2 que dans 1080, 2 fois autant de facteurs 3, 2 fois autant de facteurs 5; les exposants doivent donc être doublés. $1080^2 = 2^6.3^6.5^2$.

Les facteurs premiers d'un nombre qui est le carré d'un nombre entier sont tous affectés d'exposants pairs.

Réciproquement, si les exposants des facteurs premiers d'un nombre sont tous pairs, ce nombre est un carré.

En effet, $2^6 \times 3^4 \times 5^2$ est évidemment le carré de $2^3 \times 3^2 \times 5$. On extrait alors la racine en divisant chaque exposant par 2.

Pour qu'un nombre décomposé en ses facteurs premiers soit un carré, il faut et il suffit que les exposants de ses facteurs soient tous pairs (*).

APPLICATION. Un nombre divisible par 2, ou 3, ou 5,... n'est pas un carré s'il n'est pas divisible par les carrés 4, ou 9, ou 25,...

RACINE CARRÉE DES NOMBRES ENTIERS.

260. Quand on doit extraire la racine carrée d'un nombre entier, on ignore le plus souvent si le nombre donné est ou n'est pas un carré parfait. Afin que la méthode s'applique dans les deux cas, *on se donne pour but de trouver le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans le nombre donné.* On obtient ainsi la racine exacte du nombre donné quand celui-ci est un carré parfait; dans le cas contraire, *on extrait la racine du nombre donné, à moins d'une unité.*

261. On appelle, en général, *racine carrée d'un nombre quelconque,* A MOINS D'UNE UNITÉ, *le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans le nombre donné.* Ex. : La racine carrée de 42, à moins d'une unité, est 6.

Nous considérerons deux cas : 1° Le nombre donné est moindre que 10^2 ou 100; 2° il est plus grand que 100.

262. 1er CAS. *Le nombre donné est moindre que* 100.

Ex. : Extraire la racine carrée de 54.

Dans ce cas on a recours à la table des carrés des 10 premiers nombres, à moins qu'on ne sache ces carrés par cœur; ce qui vaut mieux. On voit quel est le plus grand de ces carrés contenu dans le nombre donné. Dans 54, c'est 49 dont la racine carrée est 7; on dit que 7 est la racine carrée de 54 à moins d'une unité.

(*) Ce caractère ne peut réellement servir que si le nombre proposé est, *à priori*, décomposé, ou peut être très-aisément décomposé en ses facteurs premiers. Les autres caractères qui apprennent seulement, et dans certains cas, qu'un nombre entier donné n'est pas un carré ont, pour ainsi dire, perdu toute importance depuis qu'on extrait les racines, à peu près exclusivement, soit à moins d'une unité simple, soit à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.

263. 2e Cas. *Le nombre donné est plus grand que* 100.

Ex. : On propose d'extraire la racine carrée de 428319.

Il s'agit de trouver le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans 428319. Le nombre étant plus grand que 100, la racine cherchée, au moins égale à 10, peut être considérée comme composée d'un certain nombre de dizaines, plus des unités simples en nombre moindre que 10. Le carré des dizaines, nombre exact de centaines terminé par deux zéros, est tout entier contenu dans les 4283 centaines de 428319; le carré du *nombre* de ces dizaines est tout entier contenu dans 4283; (255) ce *nombre* de dizaines, considéré comme un nombre d'unités simples, *ne surpasse donc pas la racine carrée de* 4283, *prise à moins d'une unité* (261). *Il ne lui est pas inférieur non plus.* En effet, supposons, pour fixer les idées, la racine de 4283, prise à moins d'une unité, égale à 65; 65^2 est contenu dans 4283; $(65\times10)^2$, ou $65^2\times100$, est contenu dans 428300, et, *à fortiori*, dans 428319; la racine de 428319 contient donc au moins 65 dizaines (*). Ainsi donc, il y a au moins autant de dizaines dans la racine de 428319 qu'il y a d'unités dans la racine carrée de 4283. Le *nombre* des dizaines de la racine carrée de 428319 n'étant ni plus grand ni plus petit que la racine carrée de 4283, prise à moins d'une unité, est précisément éga là cette racine de 4283 (**).

Nous sommes donc conduits à chercher d'abord la racine carrée, à moins d'une unité, de 4283, considéré comme un nombre d'unités simples; mais 4283 étant plus grand que 100, sa racine, au moins égale à 10, contient encore une ou plusieurs dizaines; en recommençant le raisonnement précédent, qui est tout à fait général, nous serons conduits à séparer deux chiffres à droite; puis à extraire la racine du nombre 42 restant à gauche, pour avoir le *nombre* des dizaines de la racine de 4283.

(*) On peut désigner par n la racine carrée de 4283 prise à moins d'une unité, et dire : n^2 est contenu dans 4283; le carré de $n\times10$, $n^2\times100$, sera contenu dans 428300, et *à fortiori* dans 428319; donc il y a au moins $n\times10$ ou n dizaines dans la racine carrée de 428319.

(**) On peut démontrer la même chose par un raisonnement un peu différent que nous employons pour la racine cubique.

En ef[illegible] ... étant moindre que 100.
On ex[illegible] ... (1er cas); cette racine est 6 (*). Nous avons facilement sa racine
Po[illegible] ... D'après notre raisonnement, il y a 6 dizaines dans la racine de
4283; il nous faut trouver les unités de cette racine (**).
Celle-ci étant composée de 6 dizaines, plus un certain nombre
d'unités, le nombre 4283, qui contient le carré de cette racine,
contient le carré de 6 dizaines, *plus deux fois ces 6 dizaines multipliées par les unités, plus le carré de ces unités* (254).

Nous pouvons retrancher de 4283 la première de ces trois parties $(6 \times 10)^2 = 36 \times 100 = 3600$. Le reste 683 contient encore les deux parties indiquées (***).

La première de ces parties, le double produit des dizaines par les unités, est comme un de ses facteurs, *deux fois 6 dizaines*, terminée par un zéro; le dernier chiffre 3 du reste n'en provient pas, et ce produit est tout entier contenu dans les 68 dizaines du reste. 68 dizaines forment donc un nombre égal au produit en question, ou un nombre plus fort. Si on divise 68 dizaines par le facteur connu de ce produit, 2 fois 6×10, ou 12 dizaines, on aura pour *quotient entier* l'autre facteur, le chiffre des unités cherchées, ou un nombre plus fort. Diviser 68 dizaines par 12 dizaines revient ici à diviser 68 par 12; le quotient entier de cette division est 5. Comme nous l'avons dit, 5 est le chiffre des unités de la racine de 4283, ou un nombre plus fort. Pour l'essayer, nous mettrons ce chiffre 5 à la droite de 12, double du nombre des dizaines trouvées; on forme ainsi $125 = 2$ fois 6 dizaines plus 5. Si nous multiplions 125 par 5 lui-même, nous aurons pour produit :

$$125 \times 5 = (120 + 5) \times 5 = 2 \times 6 \cdot 10 \times 5 + 5^2.$$

(*) Remarquons en passant que nous sommes conduit, en vertu du raisonnement précédent, à séparer constamment deux chiffres sur la droite, tant que le nombre restant à gauche a au moins 3 chiffres; quelque grand que soit le nombre proposé, il se trouvera ainsi partagé en tranches de deux chiffres, en allant de droite à gauche.

(**) Il peut ne pas y avoir d'unités à la racine du nombre 4283. (V. la remarque qui suit la règle générale.)

(***) Dans la pratique, on retranche le carré de 6 ou 36 de la première tranche 42, et on abaisse, à droite, la tranche suivante 83; en effet $(6 \times 10)^2$ valent 36 centaines, ces 36 centaines se retranchent directement des 42 centaines de 4283; il reste 6 centaines, auxquelles il faut joindre les 83 unités non employées; ce qui donne bien le reste 683.

2 fois 6 dizaines multipliées par 5, plus le carré de 5, c'est justement la somme des deux parties qui doivent être contenues dans 683, si 5 n'est pas trop fort comme chiffre des unités de la racine de 4283. Or $125 \times 5 = 625$ peut se retrancher de 683; le reste est 58. Donc 5 n'est pas trop fort, il est bon; mettons-le à côté du chiffre 6 des dizaines, et nous aurons 65 pour la racine de 4283, à moins d'une unité. De plus, il est clair que $4283 - 65^2 = 58$. (On a retranché en deux fois de 4283, $60^2 + 2.60 \times 5 + 5^2 = 65^2$).

Cette racine 65 de 4283 est, d'après le premier raisonnement, le *nombre* des dizaines de la racine carrée du nombre 428319, auquel nous allons maintenant revenir.

Il nous faut trouver les unités simples de la racine carrée de 428319, s'il y en a. Cette racine étant composée de 65 dizaines, plus le nombre d'unités cherché, le nombre 428319 contient le carré de 65 dizaines, $(65 \times 10)^2$ ou $65^2 \times 100$, plus 2 fois $65 \times 10 \times$ le nombre des unités, plus le carré de ces unités.

Nous pouvons retrancher de 428319 la première de ces trois parties $65^2 \times 10^2$, c'est-à-dire le carré de 65 suivi de 2 zéros; en faisant cette soustraction, on aurait évidemment au reste, 19, sous les 2 zéros, et 58, sous le carré de 65; c'est-à-dire que ce reste est le nombre 5819, qu'on obtient tout simplement en abaissant, à côté du 2e reste 58, la dernière tranche 19 de 428319.

Raisonnant maintenant comme nous avons fait pour avoir les unités de la racine de 4283, nous serons conduits à séparer un chiffre sur la droite de 5819, et à diviser le nombre 581 par 65×2 ou 130. Le quotient entier de cette division est 4; 4 est le nombre des unités de la racine de 428319, ou un nombre plus fort; ce nombre d'unités sera 4 exactement, si on peut retrancher du reste 5819 les deux parties 2 fois 65 dizaines multipliées par 4, plus 4^2. Pour essayer, on écrit le chiffre 4 à droite du double 130 de 65, et on multiplie 1304 par 4. On forme ainsi :

$$(1300 + 4) \times 4 = (2.65 \times 10 + 4) \times 4 = 2.65 \times 10 \times 4 + 4^2.$$

Le produit $1304 \times 4 = 5216$ peut se retrancher de 5819; le reste est 603 : on en conclut que 4 est bien le chiffre des unités de la racine carrée de 428319; on écrit ce chiffre à droite de 65, et on a 654 pour la racine carrée cherchée de 428319, à moins d'une unité.

Ayant retranché en deux fois de 428319 la somme $(65\times10)^2$ $+2.65\times10\times4+4^2=654^2$, on a trouvé le reste 603; donc $428319=654^2+603$.

Il est évident que ce raisonnement se continuerait de la même manière, si après 19 il y avait d'autres tranches de deux chiffres dans le nombre donné; 654 serait le nombre des dizaines de la racine du nombre que formerait 628319 suivi de la tranche suivante, et on raisonnerait sur ce nombre et les 654 dizaines, comme on a raisonné sur 4283 et 65 dizaines.

Voici le tableau des opérations:

42.8319	65
36	12.5 × 5
68.3	13 0.4 × 4.
62 5	
5 81.9	
5 21 6	
60 3	

264. Règle. *Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier, on le partage en tranches de deux chiffres, en allant de droite à gauche, la dernière tranche à gauche pouvant seule n'avoir qu'un seul chiffre. On extrait ensuite la racine du plus grand carré entier contenu dans la première tranche, en allant de gauche à droite; cette racine est le premier chiffre, à gauche, de la racine cherchée; on l'écrit à la place marquée pour cette racine, ordinairement à droite du nombre donné, que l'on en sépare par un trait vertical. On ôte de la première tranche, à gauche, le carré de ce chiffre; à côté du reste, on abaisse la tranche qui suit celle dont on vient d'extraire la racine. On sépare le premier chiffre, à droite, du nombre ainsi obtenu, et on divise le nombre restant à gauche par le double du premier chiffre écrit à la racine. Le quotient entier de cette division est le deuxième chiffre de la racine, ou un nombre plus fort. Pour éprouver ce chiffre, on le place à droite du double du premier chiffre, et on multiplie le nombre ainsi formé par le chiffre à éprouver lui-même; on retranche ce produit du nombre que forme le premier reste suivi de la deuxième tranche; si cette soustraction peut se faire, le chiffre essayé est bon, et on le met à la racine à la droite du premier. Si la soustraction est impossible, on diminue le*

chiffre d'une unité, et on l'essaye de nouveau : s'il était encore trop fort, on le diminuerait encore d'une unité, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la soustraction indiquée ait pu se faire. Le dernier chiffre essayé ayant été mis à la droite du premier chiffre de la racine, on abaisse à côté du deuxième reste la troisième tranche du nombre proposé ; on sépare un chiffre sur la droite du nombre ainsi formé, et on divise le nombre restant à gauche par le double du nombre actuellement écrit à la racine, double que l'on forme et que l'on écrit à ce effet ; le quotient est le troisième chiffre de la racine, ou un nombre plus fort. On l'essaye comme le deuxième, en le mettant à droite du double de la racine trouvée précédemment, et multipliant le nombre ainsi obtenu par ce chiffre lui-même, pour retrancher le produit du nombre que forme le deuxième reste suivi de la troisième tranche ; si la soustraction ne pouvait pas se faire, on diminuerait le chiffre essayé d'une unité, et on l'essayerait de nouveau, ainsi diminué. Lorsque la soustraction a pu se faire, on met le dernier chiffre essayé, à la racine, à la droite des deux premiers ; à côté du troisième reste, on abaisse la quatrième tranche ; on sépare le dernier chiffre à droite du nombre obtenu, et on divise le nombre restant à gauche par le double du nombre écrit à la racine, on essaye le quotient obtenu comme les deux chiffres précédents de la racine et ainsi de suite ; on continue de cette manière jusqu'à ce qu'on ait abaissé et employé toutes les tranches du nombre proposé ; autant de tranches, autant de chiffres à la racine.

Il peut arriver, dans l'une des divisions qui donnent successivement les chiffres de la racine à partir du deuxième, à gauche, que le dividende ne contienne pas le diviseur ; c'est que la racine ne contient pas d'unités de l'ordre inférieur aux dernières trouvées à la racine. *On met alors un zéro à la racine ; considérant le nombre, que forme le dernier reste suivi de la dernière tranche abaissée, comme un nouveau reste, on abaisse à sa droite la tranche suivante du nombre proposé pour continuer l'opération comme il a été dit* (*).

(*) Car il résulte du raisonnement que s'il y avait une seule unité de l'ordre en question, le nombre que l'on divise par le double de la racine contiendrait au moins le produit de ce double par 1, c'est-à-dire contiendrait ce double ; ce qui est contre l'hypothèse ; donc il n'y a pas d'unités de cet ordre à la racine. Le nombre de dizaines que termine le zéro que l'on vient d'écrire a pour carré le

Croyant un chiffre à essayer, trop fort de plusieurs unités, on le diminue de plus d'une unité à la fois (*); on peut alors arriver à un chiffre trop faible. *On reconnaît qu'un chiffre que l'on vient de déterminer, est trop faible, quand le reste dépasse le double de la racine trouvée.*

En effet, à chaque calcul particulier, on opère sur le nombre que forment les tranches considérées jusque-là, comme si c'était un nombre d'unités simples, non suivi d'autres tranches. Soit N ce nombre, n la racine trouvée, et r le reste; n doit être le plus grand nombre entier dont le carré soit compris dans N. D'après notre raisonnement, $N = n^2 + r$. Comparons N à $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

Si r ne surpasse pas $2n$, N est inférieur à $(n+1)^2$, et n répond à la question; il n'est pas trop faible. Si, au contraire, r dépasse $2n$, il est au moins égal à $2n+1$, et N au moins égal à $(n+1)^2$; par conséquent, n est trop faible. Puisque N contient le carré du nombre suivant, il faut augmenter le dernier chiffre de n, c'est-à-dire le dernier chiffre trouvé, d'une unité, et l'essayer de la même manière.

Il résulte évidemment du raisonnement que si la dernière soustraction ne donne pas de reste, le nombre écrit à la racine est la racine exacte du nombre donné, lequel est alors un carré parfait.

265. Preuve. Pour faire la preuve de l'opération, on élève au carré la racine trouvée; à ce carré on ajoute le reste : le résultat de cette addition doit être le nombre donné ($N = n^2 + R$).

Remarque. En effectuant les soustractions indiquées par la règle, d'une manière analogue à ce qui se fait dans la division, on abrége l'écriture. Voilà le calcul pour l'exemple ci-dessus :

42.83.19	65
8 83	125 × 5
5819	1304 × 4
603	

carré de la racine précédemment trouvée, suivi de deux zéros; ce carré retranché du nombre proposé, on a bien le reste avec lequel on continue.

(*) On peut démontrer que si le nombre déjà écrit à la racine, et dont le double sert de diviseur actuellement, est 5 ou un nombre plus grand, le quotient

DU CARRÉ ET DE LA RACINE CARRÉE D'UNE FRACTION.

266. **On forme le carré d'une fraction en élevant le numérateur au carré, et le dénominateur au carré.**

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{5^2}{7^2}.$$

267. THÉORÈME. *Pour qu'une fraction irréductible soit un carré, il faut et il suffit que ses deux termes soient des carrés.*

En effet, supposons qu'une fraction irréductible $\frac{A}{B}$ soit le carré d'une autre fraction $\frac{a}{b}$; nous pouvons toujours supposer $\frac{a}{b}$ irréductible; car, si elle ne l'était pas, on pourrait la réduire. Cela posé, nous avons $\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$. Mais a étant premier avec b, a^2 est premier avec b^2, et $\frac{a^2}{b^2}$ est une fraction irréductible. Par conséquent, on doit avoir $A = a^2$ et $B = b^2$ (130), c'est-à-dire que A et B sont des carrés. La condition indiquée est donc nécessairement remplie.

Réciproquement, si on a $A = a^2$, $B = b^2$, évidemment $\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$; c'est-à-dire que $\frac{A}{B}$ est un carré.

La condition énoncée est suffisante.

Une fraction irréductible dont les deux termes ne sont pas des carrés n'est donc pas le carré d'une autre fraction; comme elle est encore moins le carré d'un nombre entier, sa racine est un nombre *incommensurable*, et ne peut être évaluée que par approximation. Ex. : $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

---

entier obtenu ne peut jamais surpasser de plus d'une unité le chiffre cherché; si donc on le trouve trop fort, il ne faut jamais, dans ce cas, le diminuer de plus d'une unité.

EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE DES FRACTIONS.

268. *Pour extraire la racine carrée d'une fraction, on extrait d'abord la racine carrée du dénominateur, puis celle du numérateur. Si ces deux nombres sont des carrés, en divisant la racine du numérateur par celle du dénominateur, on obtient la racine de la fraction proposée.*

Ex. : $\sqrt{\frac{49}{81}}$, $49 = 7^2$, $81 = 9^2$. $\frac{49}{81} = \frac{7^2}{9^2}$

$$\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}.$$

Si, appliquant cette règle à une fraction qui n'est pas réduite à sa plus simple expression, on trouve que les deux termes ne sont pas des carrés, on peut opérer comme il suit :

On multiplie le numérateur par le dénominateur, et on extrait la racine carrée du produit; si ce produit est un carré, en divisant sa racine par le dénominateur de la fraction donnée, on aura la racine carrée de cette fraction.

Ex. : On demande la racine de $\frac{175}{343}$.

$$175 \times 343 = 60025. \quad \sqrt{60025} = 245.$$

$$\sqrt{\frac{175}{343}} = \sqrt{\frac{175 \times 343}{342^2}} = \frac{245}{343}.$$

La fraction $\frac{245}{343}$ se réduit à $\frac{5}{7}$, qu'on aurait obtenue immédiatement en réduisant $\frac{175}{343}$ à sa plus simple expression, $\frac{25}{49}$, et extrayant la racine de $\frac{25}{49}$, d'après la première règle.

Nous conseillons de réduire une fraction donnée à sa plus simple expression avant d'en extraire la racine.

269. *Si aucune de ces règles ne réussit pour une fraction donnée, et la première seule doit être appliquée à une fraction irréductible, la fraction donnée n'est pas un carré parfait; sa racine n'est pas commensurable, et ne peut être calculée que par approximation.*

Pour avoir une valeur approchée de la racine carrée d'une fraction, on commence généralement par rendre son dénominateur carré parfait, s'il ne l'est pas, puis on applique à cette fraction la règle suivante :

270. *Lorsque le dénominateur seul d'une fraction est un carré, on extrait la racine du numérateur, à moins d'une unité, et on divise cette racine par celle du dénominateur.*

Ex. : $\frac{237}{400}$.

$400 = 20^2$. La racine de 237 à moins d'une unité est 15 ; on dit que $\frac{15}{20}$ est la racine de $\frac{237}{400}$ à moins de $\frac{1}{20}$, ou à $\frac{1}{20}$ près.

On appelle racine carrée d'un nombre à moins de $\frac{1}{n}$, le plus grand nombre de $n^{ièmes}$ dont le carré soit contenu dans ce nombre donné.

Ainsi la racine carrée de $\frac{237}{400}$, à $\frac{1}{20}$ près, est le plus grand nombre de 20^{ièmes} dont le carré soit contenu dans $\frac{237}{400}$.

Or on a par hypothèse :

$$15^2 < 237 < 16^2;$$

Par suite, $$\frac{15^2}{20^2} < \frac{237}{400} < \frac{16^2}{20^2};$$

Ou bien $$\left(\frac{15}{20}\right)^2 < \frac{237}{400} < \left(\frac{16}{20}\right)^2.$$

Ce résultat démontre bien que $\frac{15}{20}$ est le plus grand nombre de 20^{ièmes}, le plus grand multiple de $\frac{1}{20}$, dont le carré soit contenu dans $\frac{237}{400}$, c'est-à-dire, est la racine carrée de $\frac{237}{400}$ à $\frac{1}{20}$ près.

271. *Lorsque le dénominateur n'est pas un carré, on multiplie les 2 termes par un même nombre, tellement choisi que le nouveau dénominateur soit un carré; puis on applique la règle précédente.*

Ce multiplicateur commun de 2 termes doit être pris le plus

petit possible. Il ne doit jamais être plus grand que le dénominateur même de la fraction proposée (*).

$$1^{er}\text{ Ex.} : \sqrt{\frac{9}{17}} = \sqrt{\frac{9 \times 17}{17^2}} = \frac{12}{17} \text{ à moins de } \frac{1}{17}.$$

$$2^e\text{ Ex.} : \sqrt{\frac{19}{40}} = \sqrt{\frac{19 \times 10}{400}} = \frac{13}{20} \text{ à moins de } \frac{1}{20}.$$

Avant d'extraire la racine carrée d'une fraction, il est bon de la réduire à sa plus simple expression.

272. NOMBRES FRACTIONNAIRES. *Pour extraire la racine carrée d'un nombre fractionnaire, il faut joindre l'entier à la fraction et appliquer à l'expression fractionnaire résultante l'une des règles précédentes relatives aux fractions.*

273. NOMBRES DÉCIMAUX. Pour extraire la racine d'un nombre décimal, on se fonde sur cette remarque : l'unité suivie d'un nombre *pair* de zéros est un carré parfait ; l'unité suivie d'un nombre *impair* de zéros n'est pas un carré parfait. D'après cela, on distingue deux cas, dans l'extraction de la racine carrée des nombres décimaux plus grands ou plus petits que l'unité.

1[er] CAS. *Si le nombre des chiffres décimaux est pair, on supprime la virgule ; on extrait la racine carrée du nombre entier résultant, à moins d'une unité ; puis on sépare sur la droite de la racine ainsi obtenue deux fois moins de chiffres décimaux qu'il n'y en a dans le nombre donné.*

$$\text{Ex.} : \sqrt{20,5432}. \quad 20,5432 = \frac{205432}{10000}.$$

Le dénominateur étant un carré, on extrait la racine du numérateur à moins d'une unité ; on trouve 453, et il y a un reste. La racine de $\frac{205432}{10000}$ ou de 20,5432 est $\frac{453}{100}$ ou 4, 53 à moins de 0,01.

2[e] CAS. *Si le nombre des chiffres décimaux est impair, on le rend pair par l'addition d'un zéro* ; ce qui n'altère pas la valeur

---

(*) Quand le dénominateur donné est décomposé en ses facteurs premiers, on voit tout de suite quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier pour avoir un nouveau dénominateur carré parfait. (239)

du nombre donné ; *cela fait, on applique au nombre ainsi obtenu la règle du cas précédent auquel on est ramené.*

Ex. : 20,453. On écrira 20,4530, puis, supprimant la virgule dans ce dernier nombre, on continuera comme précédemment pour 20,5432.

CALCUL DES RACINES CARRÉES PAR APPROXIMATION.

274. Ainsi que nous l'avons remarqué, on ne peut pas évaluer exactement la racine carrée de tous les nombres entiers ou fractionnaires; mais, par compensation, on peut évaluer la racine carrée d'un nombre donné quelconque avec une approximation aussi grande que l'on veut.

Rappelons ici les définitions déjà données :

DÉFINITION. *On appelle racine carrée d'un nombre quelconque à moins d'une unité le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans le nombre donné.*

Autrement dit, *c'est la racine du plus grand nombre entier carré parfait contenu dans ce nombre.*

On appelle racine carrée d'un nombre donné quelconque, à moins d'une fraction $\frac{1}{n}$, *n étant entier, le plus grand nombre de* $n^{ièmes}$ *dont le carré soit contenu dans le nombre donné.*

Par exemple, on appelle racine carrée de 42 à moins de $\frac{1}{30}$ le plus grand nombre de trentièmes dont le carré soit contenu dans 42.

Nous avons appris à trouver la racine carrée d'un nombre entier à moins d'une unité (Règle, n° 264); toutes les autres questions se ramènent à celle-là.

275. RÈGLE. *Pour extraire la racine carrée d'un nombre donné quelconque à moins d'une unité, il suffit de déterminer le plus grand nombre entier qu'il contient (sa partie entière), puis d'extraire la racine carrée de ce nombre entier, à moins d'une unité, par la règle générale que nous avons indiquée.*

Par exemple, pour extraire la racine carrée de $67\frac{11}{17}$ à moins

d'une unité, on extrait simplement la racine carrée de 67 à moins d'une unité, en laissant de côté la fraction $\frac{11}{17}$; cette racine est 8.

En effet, le plus grand nombre entier carré parfait contenu dans $67\frac{11}{17}$ est contenu dans 67. Or, c'est la racine de ce plus grand carré entier qui est la racine de $67\frac{11}{17}$ comme celle de 67, à moins d'une unité (*).

Ce raisonnement s'applique évidemment à tout nombre composé d'un nombre entier et d'une seconde partie connue ou inconnue, mais assurément moindre que 1.

276. Règle. *Pour trouver la racine carrée d'un nombre donné à moins d'une fraction donnée, $\frac{1}{n}$, on multiplie ce nombre, quel qu'il soit, par le carré du dénominateur* n *de la fraction qui marque l'approximation; on extrait à moins d'une unité la racine carrée du produit ainsi obtenu, puis, cette racine trouvée, on la divise par le dénominateur* n *de la fraction qui marque l'approximation* (*).

Soit proposé, par exemple, d'extraire la racine carrée d'un nombre quelconque N à moins de $\frac{1}{100}$.

Il s'agit de trouver le plus grand nombre de centièmes dont le carré soit contenu dans N; soit $\frac{x}{100}$ ce nombre de centièmes. On doit avoir :

(*) Autrement : 8 étant la racine de 67 à moins d'une unité, on a $8^2 < 67 < (8+1)^2$. Mais 67 et $(8+1)^2$ nombres entiers diffèrent au moins d'une unité; si donc à 67 on ajoute seulement $\frac{11}{17}$, nombre moindre que 1, on aura encore $8^2 < 67 + \frac{11}{17} < (8+1)^2$. 8 est donc le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans $67\frac{11}{17}$; c'est la racine carrée de 67 + 11/17 à moins d'une unité.

Le raisonnement est évidemment général.

(**) Cette règle s'applique encore quand *n* n'est pas un nombre entier; le raisonnement est le même.

$$\left(\frac{x}{100}\right)^2 < N < \left(\frac{x+1}{100}\right)^2,$$

Ou
$$\frac{x^2}{100^2} < N < \frac{(x+1)^2}{100^2}.$$

Multipliant tous ces nombres par 100^2, on trouve :

$$x^2 < N \times 100^2 < (x+1)^2.$$

x est donc le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans le produit $N \times 100^2$; x étant la racine carrée de $N \times 100^2$ à moins d'une unité, et $\frac{x}{100}$ étant la racine de N à moins de $\frac{1}{100}$, on est ainsi conduit à la règle précédente.

Quand on applique cette règle à un nombre donné, il est toujours facile de vérifier, *à posteriori*, qu'on a bien l'approximation voulue.

Ex. : Trouver la racine carrée de 57 à $\frac{1}{12}$ près.

On forme le produit $57 \times 12^2 = 57 \times 144$; on extrait la racine carrée de ce produit à moins d'une unité ; on trouve 90. On divise ensuite cette racine par 12, et on a $\frac{90}{12}$ pour la racine carrée de 57 à moins de $\frac{1}{12}$.

En effet, on a, d'après le calcul effectué :

$$90^2 < 57 \times 12^2 < 91^2.$$

Divisant tous les nombres par 12^2, on trouve :

$$\frac{90^2}{12^2} < 57 < \frac{91^2}{12^2}$$

ou
$$\left(\frac{90}{12}\right)^2 < 57 < \left(\frac{91}{12}\right)^2.$$

Ce qui prouve que $\frac{90}{12}$ est bien la racine de 57, à moins de $\frac{1}{12}$ (N° 274, définition.)

Ni l'un ni l'autre raisonnement ne supposent que N soit entier ; tous deux s'appliquent au cas où N est un nombre fractionnaire ou même incommensurable. La différence dans le calcul existera alors seulement qu'il s'agira de trouver, à moins d'une unité, la racine du produit $N \times n^2$, lequel peut être un nombre entier, fractionnaire ou incommensurable, suivant l'espèce du nombre N lui-même. Nous savons extraire la racine carrée d'un nombre quelconque, à moins d'une unité, qu'il soit entier ou non. (264)

2ᵉ Ex. : Trouver la racine carrée de $19\frac{7}{11}$ à moins de $\frac{1}{20}$ près.

$$20^2 = 400 ; \left(19 \times \frac{7}{11}\right) \times 400 = 19 \times 400 + \frac{7 \times 400}{11} =$$

$$7600 + \frac{2800}{11}$$

On extrait les entiers de $\frac{2800}{11}$, ce qui donne $254\frac{6}{11}$; on extrait la racine de 7854, à moins d'une unité, en négligeant les $\frac{6}{11}$; cette racine est 88 ; $\frac{88}{20}$ est la racine demandée de $19\frac{7}{11}$ à $\frac{1}{20}$ près.

Évaluer une racine carrée à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.

277. Les racines carrées s'évaluent le plus souvent en décimales, à moins d'une unité, de 0,1, de 0,01, de 0,001, etc..., à moins d'une unité décimale d'un ordre donné quelconque.

L'unité d'approximation pouvant s'écrire $\frac{1}{10^m}$; (ex.: $\frac{1}{100}$ au lieu de 0,01) ; en raisonnant comme nous avons fait, n° 276, on est conduit à cette règle :

RÈGLE. *Pour extraire la racine carrée d'un nombre quelconque à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, on multiplie ce nombre par l'unité suivie de deux fois autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux dans la fraction décimale qui marque l'approximation ; on extrait la racine du produit à moins d'une unité ;*

puis on sépare sur la droite de la racine autant de chiffres décimaux qu'on en demande dans cette racine.

278. Ex. : $\sqrt{42}$ à 0,001 près.

0,001 peut s'écrire $\frac{1}{1000}$; on multiplie 42 par le carré de 1000 (276), ou l'unité suivie de 6 zéros ; on extrait la racine de 42000000 à moins d'une unité, et cette racine trouvée, on la divise par 1000, c'est-à-dire, on sépare 3 chiffres décimaux sur la droite. $\sqrt{42} = 6,480$ à moins de 0,001.

Dans le cas d'un nombre entier, on est toujours conduit à le faire suivre de deux fois autant de zéros que la racine doit avoir de chiffres décimaux.

1er Ex. : Trouver la racine carrée de $39\frac{4}{11}$ à 0,001 près.

Quand on a multiplié ce nombre 1000^2 ou 1000000, ce qui donne $39000000 + \frac{4000000}{11}$; on extrait les entiers de $\frac{4000000}{11}$; on les joint à 39000000, en laissant de côté la fraction complémentaire; puis on continue suivant la règle.

Dans le cas d'un nombre fractionnaire, le calcul revient à convertir le nombre donné en un nombre décimal ayant 2 fois autant de décimales qu'on en demande à la racine, puis à extraire la racine du nombre décimal, suivant la règle du nº 272.

2e Ex. : Trouver la racine de 537,489 à 0,001 près.

$537,489 \times 1000^2 = 537489000$. On extrait la racine carrée de ce dernier nombre, à moins d'une unité ; on sépare trois décimales à droite de la racine.

3e ex. : $\sqrt{319,5732643278}$ à moins de 0,001.

On multiplie le nombre donnée par 1000^2 ou 1000000, ce qui se fait en avançant la virgule de 6 places ; on trouve ainsi :

319573264,3278 ;

il faut extraire la racine de ce produit, à moins d'une unité ; on laisse de côté la fraction décimale 0,3278, (275) et on extrait la racine de 319573264 ; à la droite de cette racine, on sépare 3 chiffres décimaux. Cela revient évidemment à prendre les 6 pre-

miers décimaux du nombre donné, en supprimant tous les autres, puis à extraire la racine du nombre résultant 319,573264, à moins de 0,001.

279. Remarque. Quand le nombre décimal donné a ou doit avoir plus de deux fois autant de chiffres décimaux qu'on en demande à la racine, on ne prend à la droite de la virgule que ce nombre double de chiffres décimaux; laissant de côté tous les autres, on applique la règle à ce nombre décimal abrégé comme s'il était donné *à priori*. Ceci est vrai, quel que soit le nombre des chiffres décimaux du nombre donné, qu'il soit limité ou illimité.

Il résulte de cette remarque que, si les chiffres décimaux du nombre donné doivent s'obtenir par des calculs préliminaires à l'extraction de la racine carrée, on peut se borner à calculer 2 fois autant de ces chiffres décimaux du nombre donné qu'on en demande à la racine, pour substituer ensuite au nombre donné le nombre décimal ainsi obtenu.

Hâtons-nous de dire que, dans ce dernier cas, il n'est même pas nécessaire, en général, de calculer 2 fois autant de chiffres décimaux du nombre donné qu'on en demande à la racine. C'est ce que nous montrons page 212.

Méthode abrégée pour extraire la racine carrée.

280. Quand la racine carrée d'un nombre entier doit avoir un assez grand nombre de chiffres, on peut trouver la racine plus rapidement que par le procédé ordinaire.

Ayant trouvé un certain nombre de chiffres à gauche de la racine, n chiffres, par exemple, on peut, en général, trouver 2, 3, ... jusqu'à $n-1$ nouveaux chiffres de la racine par une simple division.

Règle *Supposons, par exemple, qu'ayant trouvé les* n *premiers chiffres, à gauche, de la racine carrée d'un nombre entier donné, lesquels forment un nombre* a, *on veuille trouver* n — 1 *nouveaux chiffres de cette racine. On connaît ou on peut connaître le reste de la soustraction de* a^2 *ôté de l'ensemble des* n *premières tranches à gauche du nombre proposé. A droite de ce reste, on abaisse les* n — 1 *tranches suivantes; sur la droite du nombre ainsi formé, on sépare* n—1 *chiffres; puis on divise le nombre restant à gauche par le dou-*

ble de la racine trouvée, par 2a. *Si le quotient entier de cette division n'avait pas* n — 1 *chiffres* (*autant qu'on a abaissé de tranches nouvelles*), *on le compléterait à* n — 1 *chiffres en mettant des zéros à sa gauche; cela fait, on écrit ce quotient à la droite de* a; *le nombre ainsi formé est la racine, à moins d'une unité, par défaut ou par excès, du nombre que forment toutes les tranches employées.*

Veut-on savoir si la racine ainsi complétée est approchée par défaut, et dans ce cas, connaître l'excès du nombre composé des $n+n-1$ tranches employées sur le carré de cette racine. *On abaisse à côté du reste de la division les* n—1 *chiffres séparés à droite du dividende, qui n'ont pas été employés dans cette division; du nombre ainsi formé, on retranche le carré du quotient; si la soustraction peut se faire, la racine complétée est approchée par défaut, et on a le reste demandé. Si la soustraction ne peut se faire, la racine complétée est approchée par excès, et il faut diminuer le quotient de* 1 *avant de l'écrire à la racine, si on veut que le dernier chiffre, à droite, de celle-ci soit exact.*

Pour avoir l'excès susdit dans ce cas, au reste de la division on ajoute le diviseur; à la droite de la somme, on abaisse les $n-1$ chiffres qui, séparés à droite du dividende, n'ont pas été employés dans la division; puis, du nombre ainsi formé, on retranche le carré du quotient corrigé. Le reste est l'excès des $n+n-1$ tranches du nombre sur le carré de la racine corrigée.

Nous allons appliquer et démontrer cette règle. Nous supposons pour fixer les idées que la racine cherchée ait seulement 5 chiffres.

Ex. $\sqrt{3276724826}$.

Voici le calcul :

3276724826	57242
776	107.
2772	1142.2
48848.26	1144
3088	42
80026	42
1764	84
78262	168
	1764

Ayant trouvé par le procédé ordinaire les 3 premiers chiffres à gauche, 572, de la racine, et le reste 488, on abaisse à droite de ce reste les deux tranches suivantes du nombre proposé; on sépare 2 chiffres sur la droite du nombre ainsi obtenu, et on divise le nombre restant à gauche 48848 par le double de la racine trouvée, 2 fois 572 ou 1144 ; le quotient entier de cette division est 42; on l'écrit à la droite de 572. Le nombre ainsi obtenu, 57242 est la racine du nombre proposé, à moins d'une unité par défaut ou par excès.

Nous avons fait la vérification indiquée dans la règle. Ayant abaissé à droite du reste 800 de la division les 2 chiffres 26 non employés dans cette opération, nous avons retranché du nombre ainsi formé 80026 le carré du quotient 42.

La soustraction peut se faire. 57242 est la racine carrée du nombre proposé, à moins d'une unité, par défaut, et

$$3276724826 - 57242^2 = 78262.$$

DÉMONSTRATION.

La racine cherchée devant avoir 5 chiffres, 572 est le nombre des centaines de cette racine; celle-ci se compose donc de 57200 plus un certain nombre b moindre que 100; le nombre proposé 3276724826 contient donc le carré de $57200 + b$ ou

$$57200^2 + 2 \times 57200 \times b + b^2.$$

Ayant retranché 57200^2 de ce nombre proposé, on a eu pour reste 4880000, plus la partie non employée 4826, en tout 4884826. Ce reste contient encore les deux dernières parties du carré ci-dessus; la 1re de ces 2 parties $2 \times 57200 \times b$, nombre exact de centaines est tout entière contenue dans 48848 centaines du reste; les 26 unités ne peuvent en faire partie. Si donc on divise 48848 centaines par 2×572 ou 1144, la partie entière du quotient sera b ou un nombre plus fort (*).

(*) C'est ce qui conduit à la méthode; on remarquera l'analogie de ce raisonnement avec celui que l'on fait habituellement pour trouver, un à un, les chiffres de la racine carrée qui suivent le 1er trouvé.

Nous allons montrer que si ce quotient *entier* dépasse b, il ne peut dépasser $b+1$. En effet, le nombre donné ayant pour racine carrée, à moins d'une unité, $57200+b$, est moindre $(57200+b+1)^2$ ou

$$57200^2+2\times 57200\times(b+1)+(b+1)^2.$$

Quand du nombre donné on a retranché 57200^2, le reste 4884826, et à fortiori 4884800 est moindre que $2\times 57200\times(b+1)+(b+1)^2$. Donc, le quotient entier de 4884800 par 2×57200, ou plus simplement, le quotient de 48848 par $2\times 572 = 1144$ est moindre que le quotient de $2\times 57200\times(b+1)+(b+1)^2$ par 2×57200.

$$\frac{2\times 57200\times(b+1)+(b+1)^2}{2\times 57200}=b+1+\frac{(b+1)^2}{2\times 57200}.$$

Or la partie entière de ce dernier quotient est justement $b+1$; car $\frac{(b+1)^2}{2\times 57200}$ est moindre que 1; en effet, d'après les hypothèses de la question, on a $b+1<100$, et en même temps $b+1<2\times 572$, d'où $(b+1)^2<2\times 572\times 100$. Le quotient entier 42 de 48848 par 1144 est donc au plus égal à $b+1$; donc $57200+42$ ou 57242 est la racine carrée, à moins d'une unité, par défaut ou par excès, de 3276724826. Ce qu'il fallait démontrer.

Quant à la vérification et au moyen indiqué de trouver le reste final, il suffit d'observer que dans le courant de l'opération on a retranché du nombre proposé, 1° 57200^2; ce qui a donné le 1er reste 4884826 : 2° en faisant la division, on a retranché (1144×42) centaines $=2\times 57200\times 42$, ce qui a donné un 2° reste 80026; 3° on a retranché 42^2, ce qui a donné le reste 78262. On a ainsi retranché en tout $57200^2+2.572\times 100\times 42+42^2$, c'est-à-dire $(57200+42)^2$ ou 57242^2. On a donc $78262=3276724826-57242^2$.

Remarque. Pour que ce raisonnement réussisse, il suffit que $b+1$, ou la partie à trouver de la racine, augmentée de 1, soit moindre que 2 fois 572, le double du nombre déjà écrit à la racine. On conclut facilement de là que si le premier chiffre à gauche est 5 ou plus grand que 5, une division unique comme celle que nous venons de faire, peut donner autant de nouveaux

chiffres de la racine qu'on en connait déjà. Ainsi pour 327672482678 ayant trouvé 3 chiffres, on en peut trouver 3 autres par la division. En effet, dans ce cas, $b+1$ au plus égal à 1000 serait moindre que 2×572, nombre de 5 chiffres. Le raisonnement est le même ; il n'y a qu'à dire *mille* au lieu de centaines.

Quand on applique la méthode précédente à l'extraction d'une racine carrée, qui doit avoir beaucoup de chiffres, on calcule les 3 premiers chiffres de cette racine par le procédé ordinaire ; puis les deux suivants par une 1re division, ce qui en fait cinq ; puis 4 de plus par une 2e division, puis 8 nouveaux par une 3e, etc......

Employons la méthode abrégée à calculer $\sqrt{2}$, à moins d'une unité décimale du 15e ordre, afin de montrer la disposition des calculs successifs.

1er calcul par la méthode ordinaire :

Première division.

	2.00.00	141	*Racines.*
	1 0.0	2.4 × 4	1re approximation :
	400	28.1 × 1	
1er reste	119		1,41

Deuxième division.

	1190.0.00	282		
	620.	42		2e approximation :
	56. 00	42		1.4142
	17 64			
2e reste	38 36		84	
			168	
			1764	

Troisième division.

	38360000.	0000	28284		
	100760		1356		
	159080		1356		
	176600			8136	3e approximation
	6896.0000			6780	1.41421356.
	183 8736			4068	
3e reste	6712 1264			1356	
				1838736	

Quatrième division.

```
                                   282842712
671212640.000000.|0000000 ─────────
1055272160       |                  2373095.
 2067440240
   875412560
    2688442400
      1428579920
        14366360
```

4e approximation : 1.414213562373095.

Ne devant pas continuer, nous ne formons pas le carré de 2373095 ; ce carré aurait au plus 14 chiffres ; et le nombre dont il faudrait le retrancher, 143663600000000, en a 15. La soustraction est possible.

Erreurs relatives du carré et de la racine carrée.

281. *L'erreur relative de la racine carrée est la moitié de l'erreur relative du carré.*

A étant la valeur exacte d'un nombre, A' une valeur approchée et l'erreur relative $\frac{A-A'}{A}=a$; on a $A=A'+a.A.$ (1)

Élevant un carré, on trouve $A^2=A'^2+2a.A'\times A+a^2.A^2$;

D'où on déduit, $\frac{A^2-A'^2}{A^2}=2a\times\frac{A'}{A}+a^2$ (2)

De l'égalité (1) on déduit $A'=A-a.A=A(1-a)$; d'où $\frac{A'}{A}=1-a$, puis $2a.\times\frac{A'}{A}=(1-a)\times 2a=a^2$. Substituant cette valeur dans l'égalité (2), on trouve

$$\frac{A^2-A'^2}{A^2}=2a-a^2 \qquad 3).$$

a^2 étant ordinairement une fraction très-petite de a, on néglige a^2 auprès de $2a$; la petite erreur que l'on commet par là étant d'ailleurs plus que compensée, comme on le verra, dans toutes les applications. Au lieu de l'égalité (3), on écrit donc celle-ci :

$$\frac{A^2-A'^2}{A^2}=2\,a \qquad (4)$$

Étant proposé d'évaluer par approximation la racine carrée d'un nombre dont on ne peut obtenir les différents chiffres que par des calculs préliminaires à l'extraction de la racine, on peut appeler A^2 la valeur exacte du nombre pro-

posé, A'^2 une des valeurs approchées qu'on en peut calculer. Extraire la racine carrée de A'^2 au lieu de celle de A^2, c'est remplacer A par A'.

Cela posé, la comparaison de ces 2 égalités :

$$\frac{A-A'}{A}=a; \quad \frac{A^2-A'^2}{A^2}=2a$$

conduit à cette conclusion : *l'erreur relative de la racine carrée est la moitié de celle du carré.*

Application au calcul abrégé de la racine carrée approchée d'un nombre.

282. Ainsi que nous l'avons vu extraire, la racine carrée d'un nombre donné quelconque, N, à moins d'une unité décimale du $n^{ième}$ ordre, $\frac{1}{10^m}$, se ramène à extraire à moins d'une unité la racine carrée du produit $N \times 10^{2m}$. On connaît ou on peut aisément connaître le nombre des chiffres de la partie entière de $N \times 10^{2m}$; on tire alors parti de la règle suivante :

Règle. *Pour calculer à moins d'une unité la racine carrée d'un nombre quelconque*, A, *si cette racine doit avoir* n *chiffres, il suffit de connaître les* n + 1 *premiers chiffres à gauche de la partie entière de ce nombre donné ; connaissant ces* n + 1 *chiffres, on les fait suivre d'autant de zéros qu'il doit y avoir de chiffres en plus dans cette partie entière. On extrait à moins d'une unité la racine carrée du nombre ainsi formé ; cette racine trouvée, on l'augmente d'une unité. Le résultat est la racine du nombre donné* A, *à moins d'une unité par défaut ou par excès.*

Démonstration. Au nombre donné que nous appellerons A^2, on substitue une valeur approchée A'^2 dans laquelle on a conservé les $n+1$ premiers chiffres à gauche de la partie entière de A^2; on extrait la racine de A'^2 à moins d'une unité; l'erreur relative du carré, A^2, est moindre que $\frac{1}{10^n}$; l'erreur relative de la racine A est moindre que $\frac{1}{2}\times\frac{1}{10^n}$ (281). On peut donc compter sur les n premiers chiffres à gauche de A à moins d'une unité du $n^{ième}$ chiffre de cette racine, lequel est justement le chiffre de ses unités simples. Cette racine de A' est toujours plus faible que la racine de A ; en l'augmentant d'une unité, on est donc sûr d'avoir, à moins d'une unité par défaut ou par excès, la racine carrée de A (*).

Pour être sûr de l'exactitude du dernier chiffre de la racine carrée de A, on peut employer le moyen général indiqué n° 205.

Ex. : Calculer $\sqrt{\sqrt{2}}$ à moins de 0,001.

(*) Bien que les racines A et A' ne diffèrent pas d'une unité, leurs parties entières peuvent différer d'une unité.

On doit extraire la racine carrée d'une racine carrée qui n'est pas encore extraite. Si la racine carrée de 2 était connue, on la multiplierait par 1000^2, puis on extrairait la racine carrée de $1000^2 \times \sqrt{2}$ à moins d'une unité ; mais $\sqrt{2}$ n'a qu'un chiffre à sa partie entière; celle de $1000^2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 1000000000000}$ en aura 7 ; il suffit d'en calculer 4 et de les faire suivre de 3 zéros. Ces 4 chiffres sont 1141 ; en extrayant la racine carrée de 1141000 à moins d'une unité, on trouve 1068 ; 1,069 est la racine carrée de la racine carrée de 2 à moins de 0,001 par défaut ou par excès.

Il n'y a lieu d'appliquer ce qui précède (depuis les erreurs relatives), que dans le cas où les chiffres que l'on remplace par des zéros ne sont pas connus.

Pour l'extraction effective de la racine carrée à moins d'une unité, on pourra employer la méthode abrégée du n° 279 (V. cette méthode et le calcul de $\sqrt{2}$ comme modèle).

DU CUBE ET DE LA RACINE CUBIQUE.

283. *Le* CUBE *ou la* 3e *puissance d'un nombre est le produit de trois facteurs égaux à ce nombre.*

Ex. : Le cube de 8 est $8 \times 8 \times 8 = 512$. On l'indique ainsi 8^3.

On appelle RACINE CUBIQUE *d'un nombre donné, le nombre qui, élevé au cube, reproduit ce nombre donné.* Par exemple :

8 est la racine cubique de 512, $\frac{3}{7}$ est la racine cubique de $\frac{27}{343}$.

On indique ainsi la racine cubique : $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{\frac{27}{343}}$.

Il est bon de connaître par cœur les cubes des dix premiers nombres. Les voici :

Nombres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Cubes : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

284. THÉORÈME. *Le cube d'une somme de deux parties est égal au cube de la première partie, plus trois fois le carré de la première partie multipliée par la seconde, plus trois fois la première*

(*) Conformément au programme, nous avons abrégé ce qui concerne la racine cubique. Nous l'avons fait néanmoins de telle manière qu'en s'aidant de la théorie de la racine carrée, on peut comme exercice faire complétement celle de la racine cubique.

partie multipliée par le carré de la seconde, plus le cube de cette deuxième partie.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 \times b + 3a \times b^2 + b^3.$$

Ex. : 457 = 450 + 7.

$$\begin{array}{l}
(450 + 7)^2 = 450^2 + 2.450 \times 7 + 7^2 \\
450^2 + 2.450 \times 7 + 7^2 \\
\quad 450 + 7 \\
\hline
450^3 + 2.450^2 \times 7 + \quad 450 \times 7^2 \\
\quad + \quad 450^2 \times 7 + 2.450 \times 7^2 + 7^3 \\
\hline
450^3 + 3.450^2 \times 7 + 3.450 \times 7^2 + 7^3
\end{array}$$

En considérant le cas particulier d'un nombre décomposé en un certain nombre de dizaines, plus des unités simples, ex. : 457 = 450 + 7, on est conduit à cette proposition.

285. *Le cube d'un nombre décomposé en dizaines et unités simples se compose du cube des dizaines, plus 3 fois le carré des dizaines multiplié par les unités, plus 3 fois les dizaines multipliées par le carré des unités, plus le cube des unités.*

$$\begin{array}{lr}
450^3 = 45^3 \times 1000 = & 91125000 \\
3.450^2 \times 7 = & 4252500 \\
3.450 \times 7^2 = & 66150 \\
7^3 = & 343 \\
\hline
457^3 = & 95443993
\end{array}$$

286. *La différence entre les cubes de deux nombres consécutifs est égale à 3 fois le carré du plus petit nombre, plus 3 fois le plus petit nombre, plus 1.*

Prenons pour exemple 42 et 43.

$43 = 42 + 1$; $43^3 = (42 + 1)^3 = 42^3 + 3.\ 42^2 + 3.\ 42 + 1.$

$43^3 - 42^3 = 3 \times 42^2 + 3.42 + 1.$

Entre deux cubes consécutifs, n^3 et $(n + 1)^3$, il y a donc $3n^2 + 3n$ nombres qui ne sont pas les cubes de nombres entiers.

Par exemple, 42 compris entre 3^3 et 4^3 n'est pas le cube d'un nombre entier ; car, ce nombre entier devrait être plus grand que 3, et moindre que 4.

287. ***Lorsqu'un* NOMBRE ENTIER *n'est pas le cube d'un nombre entier, il n'est pas non plus le cube d'un nombre fractionnaire.***

Même démonstration que pour le carré (V. n° 258).

$\sqrt[3]{42}$ est un nombre incommensurable, c'est-à-dire qui n'a pas de commune mesure avec l'unité. On ne peut calculer cette racine que par approximation.

288. ***Le cube d'un* PRODUIT *est égal au produit du cube de ses facteurs*** (*V*. le n° 56).

***Pour qu'un nombre entier soit un cube, il* FAUT *et il* SUFFIT *que les exposants de ses facteurs premiers soient des multiples de* 3.**

Même explication que pour les carrés (257).

Lorsque tous les exposants des facteurs premiers d'un nombre sont multiples de* 3*, on obtient la racine cubique de ce nombre, en formant le produit des mêmes facteurs affectés d'exposants trois fois moindres.

Ex. : $216000 = 2^6 \times 3^3 \times 5^3$; $\sqrt[3]{216000} = 2^2 \times 3 \times 5$.

COROLLAIRE. Tout nombre divisible par l'un des nombres premiers 2, 3, 5, 7..., n'est pas un cube parfait, s'il n'est pas divisible par le cube de ce facteur premier.

Le cube d'un nombre terminé par un ou plusieurs zéros, doit être terminé par 3 fois autant de zéros qu'il y en a dans le nombre proposé lui-même ; cela résulte de la règle de multiplication.

$2300 = 23 \times 100$; $2300^3 = 23^3 \times 100^3 = 23^3 \times 1000000$.

Le cube d'un nombre exact de dizaines est un nombre exact de mille. Le cube de a dizaines, $a \times 10$, égale $a^3 \times 1000$ ou a^3 mille.

Un nombre terminé par zéro n'est pas un cube parfait, s'il n'est pas terminé par un nombre de zéros multiple de 3.

Nous voici arrivé à l'extraction de la racine cubique.

289. Quand on extrait la racine cubique d'un nombre entier donné, on se propose de trouver le plus grand nombre entier, dont le cube soit contenu dans le nombre donné. On obtient alors la racine cubique exacte du nombre proposé, quand c'est un cube parfait ; dans tous les cas, le résultat trouvé est la racine cubique du nombre donné *à moins d'une unité.*

En général, on est convenu d'appeler racine cubique d'un nom-

bre quelconque, à moins d'une unité, le plus grand nombre entier dont le cube soit contenu dans le nombre donné.

Dans l'extraction de la racine cubique d'un nombre entier, nous considérerons deux cas; celui où le nombre donné est inférieur à 1000 ou 10^3, et celui où il est au moins égal à 1000.

290. 1er CAS. Soit proposé d'extraire la racine cubique de 258.

Le plus grand cube contenu dans 258 ne peut être que l'un des cubes des neuf premiers nombres. On doit connaître ces cubes par cœur; on sait alors immédiatement quel est le plus grand d'entre eux contenu dans 258.

Quand on ne connaît pas les cubes, on les calcule par ordre de grandeurs croissantes, jusqu'à ce qu'on en trouve un qui dépasse 258. De l'une et de l'autre manière, on trouve facilement que le plus grand cube entier contenu dans 258 est 216, dont la racine est 6. On dit que 6 est la racine cubique de 258 à moins d'une unité.

291. 2e CAS. *Le nombre donné est plus grand que 1000.*

Ex. $\sqrt[3]{245864819}$.

Ce nombre surpassant 1000, sa racine cubique, au moins égale à 10, peut être considérée comme composée d'un certain nombre de dizaines, plus un nombre d'unités moindre que 10. Soit a le nombre de ces dizaines de la racine; le nombre proposé 245864819 contient le cube de a dizaines, $(a\times 10)^3 = a^3\times 1000$, ($a^3$ mille), et ne contient pas le cube $(a+1)$ dizaines, $[(a+1)\times 10]^3=(a+1)^3\times 1000$, $(a+1)^3$ mille.

Le nombre 245864 des mille de ce nombre proposé est donc au moins égal à a^3, et moindre que $(a+1)^3$:

$$a^3 \leqq 245864 < (a+1)^3.$$

Il résulte de là que a est la racine cubique de 245864, prise à moins d'une unité (289). Nous allons donc chercher la racine cubique de 245864 considéré comme un nombre d'unités simples, et nous ne reviendrons à 245864819 que lorsque nous aurons sa racine cubique de 245864.

Mais ce dernier nombre étant plus grand que 1000, la racine plus grande que 10 contient des dizaines et des unités, et le même raisonnement nous conduira à séparer 3 chiffres sur la droite et à extraire la racine cubique de 245 pour avoir les dizaines de celle

de 245864. La racine de 245 est 6 ; celle de 245864 se composant de 6 dizaines et d'un certain nombre d'unités ; ce nombre, qui contient le cube de sa racine, contient $(6\times10)^3+3.(6\times10)^2\times u+3.\times6\times10\times u^2+u^3$; (u désigne le nombre des unités simples). Nous pouvons retrancher de 245864 le cube de $6\times10=6^3\times1000=$ 16 mille, qui se retranchent des 245 mille ; il reste 29 mille qui, joints aux 864 unités non employées, donnent 29864 ; ce reste contient encore les 3 autres parties énoncées tout à l'heure $3\times6^2\times100\times u+$ etc. La 1re de ces 3 parties, nombre exact de centaines, terminé par 2 zéros, est entièrement comprise dans les 298 centaines du reste, la partie 64 de ce reste n'en provenant pas ; (V. 285) ; $3\times6^2\times100\times u$ étant contenu dans 298 centaines ou 29800, si nous divisons 29800 par $3\times6^2\times100$, et 298 par $3\times6^2=108$, nous aurons au moins pour quotient entier u ; nous pourrons avoir un nombre plus fort, car, dans ces 298 centaines, il y a des centaines provenant des autres parties qui doivent entrer dans 29864. Le quotient de 298 par 108 est 2. Nous avons à vérifier si 2 est bien le chiffre des unités de la racine de 29864, s'il n'est pas trop fort. Cette vérification peut se faire de deux manières ; remplaçant plus haut u par 2, nous pouvons former les 3 parties du cube $3\times6^2\times100\times2+3\times6\times10\times2^2+2^3$, et voir si cette somme peut se retrancher du reste 29864 ; ou bien former le cube de 62, et voir si ce cube peut se retrancher du nombre 245864. ($62^3=238328$) ; l'une ou l'autre opération réussit et donne le reste. On en conclut que 2 n'est pas trop fort et que 62 est la racine cubique de 29864, à moins d'une unité.

62 est donc le nombre des dizaines de la racine cubique du nombre complet 245864819, auquel il faut maintenant revenir. Considérant 62 dizaines, comme nous avons fait 6 dizaines, nous raisonnerons de même. Nous serons évidemment conduits à abaisser la dernière tranche de 3 chiffres, 819, à droite de 7536, qui est un nombre de mille ($245864000-62^3\times1000$) ; à séparer les deux derniers chiffres à droite 19, et à diviser 75368 par 3×62^2 ; ce qui donne 6 par le chiffre des unités de la racine de 245864819. Le chiffre 6 étant trouvé, on retranche du reste 75368 les 3 parties $3\times62^2\times100\times6+3\times62\times10\times6^2+6^3$, ou bien de 245864819 le cube de 626 ; des deux manières, on trouve le reste 550443. D'où on conclut que 626 est la racine cubique du nombre proposé, et que $845864819-626^3=550443$.

Voici le tableau des opérations :

245.864819	626	
216	$6^2 \times 3 = 108.$	
29.864	$62^2 \times 3 = 1153.2.$	
10.800		
360		$6 \times 3 = 18$
4		
11164		
7536819		
1153200		$62 \times 3 = 186$
11160		
36		
1164396		
. 550.443		

Explication du calcul.

Suivant le raisonnement, nous avons extrait la racine cubique de 245, ce qui nous a donné 6 (1er CAS). De 245, nous avons retranché 6^3 ou 216 ; à côté du reste 29, nous avons abaissé la tranche suivante 864. Ayant séparé les 2 premiers chiffres à droite du reste, nous avons divisé le nombre restant à gauche 298 par 3 fois le carré de 6, 36×3 ou 108, formé à cet effet ; nous avons eu le quotient 2. Pour retrancher du reste 29864 les 3 dernières parties du cube de $6 \times 10 + 2$ ou $3.6^2 \times 100 \times 2 + 3 \times 6 \times 10 \times 2^2 + 2^3$, nous avons observé que cette somme pouvait s'écrire ainsi $(3 \times 6^2 \times 100 + 3 \times 6 \times 10 \times 2 + 2) \times 2$. Nous avons formé successivement les 3 parties de la somme écrite entre parenthèse, et nous les avons écrites sous le reste 29864, dont nous les avons néanmoins séparées par un trait horizontal. 3×6^2 est connu, c'est 108 ; nous n'avons eu qu'à y ajouter 2 zéros ; $3 \times 6 = 18$; nous avons multiplié 18 par 2 et ajouté un zéro pour avoir $3 \times 6 \times 10 \times 2$; enfin, sous ce produit, nous avons mis $2^2 = 4$; nous avons additionné les 3 nombres ; ayant obtenu la somme 11164 de la parenthèse, nous l'avons multipliée par 2 (comme il est indiqué plus haut, après cette parenthèse), et nous avons retranché le produit de 29864, au fur et à mesure de sa formation. Nous avons eu ainsi le reste 7536, à côté duquel nous avons abaissé la 3e tranche 819. Ayant séparé les 2 chiffres à droite 19, nous avons divisé

le nombre à gauche 75368 par 3×62^2. Pour former 3×62^2, nous avons observé que $3\times62^2=3\times6^2\times100+(3\times2.6\times10)\times2+3\times2^2$; ce qui est le nombre de la parenthèse ci-dessus, augmenté de 1 fois $3\times6\times10\times2$ et de 2 fois 2^2 ou de 1 fois 360 + 2 fois 4 ; il n'y a qu'à ajouter ces deux nombres à 11164 ; ce qui est facile (4 et 4, 8, 8 et 4, 12, je pose 2, et je retiens 1 ; 1 et 6, 7, et 6, 13, je pose 3, et retiens 1 ; 1 et 3, 4, et 1, 5, je pose 5 ; et enfin 11 ; total 11532). La division de 75632 par $3\times62^2=11532$ donne le quotient 6 ; pour essayer 6, nous faisons la même suite d'opérations que pour essayer 2. Les explications sont les mêmes.

Ayant déjà $3\times62^2=11532$, nous l'avons fait suivre de 2 zéros, ce qui nous a donné $3\times62^2\times100$; puis $62\times3=186$; $186\times6=1116$; $3\times186\times610=11160$; $6^2=36$, etc.,... La somme est 1164396 ; nous avons multiplié par 6, et retranché le produit du 2ᵉ reste ; $245864819-626^3=550443$.

Cette explication montre la marche à suivre, et nous dispense de formuler une règle. Le lecteur peut le faire aisément. Nous observerons seulement que lorsqu'un chiffre essayé est trop fort, on le diminue d'une unité, et on recommence la vérification ; ce qui se fait bien simplement.

V. d'ailleurs les remarques qui complètent la règle relative à la racine carrée pour en faire ici d'analogues.

DU CUBE ET DE LA RACINE CUBIQUE DES FRACTIONS.

292. *Le cube d'une fraction s'obtient en élevant le numérateur au cube et le dénominateur au cube* $\left(\frac{3}{7}\right)^3=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{3^3}{7^3}=\frac{27}{343}$.

293. *Pour qu'une fraction irréductible soit un cube parfait, il faut et il suffit que les deux termes soient des cubes parfaits.*

Se démontre comme pour le carré (Mettez a^3 et b^3 au lieu de a^2 et b^2).

Le cube d'une fraction ou d'un nombre fractionnaire ne pouvant être un nombre entier, *si une fraction n'est pas le cube d'une autre fraction*, elle n'a pas de racine cubique commensurable; on ne peut obtenir cette racine que par approximation.

294. *Pour extraire la racine cubique d'une fraction, on extrait la racine cubique du numérateur et celle du dénominateur, si ces deux nombres sont des cubes parfaits, puis on divise les deux racines l'une par l'autre dans l'ordre indiqué.*

Ex. : $\sqrt[3]{\frac{1331}{1728}} = \frac{\sqrt[3]{1331}}{\sqrt[3]{1728}} = \frac{11}{12}.$

295. *Quand la règle précédente ne peut s'appliquer, on peut multiplier le numérateur par le carré du dénominateur; on extrait la racine cubique du produit. Si cette opération réussit, en divisant cette racine par le dénominateur primitif, on obtient la racine cubique de la fraction proposée.*

$$\text{Ex. : } \frac{32}{108} = \frac{32 \times 108^2}{108^3} = \frac{32^3}{108^3}, \quad \sqrt[3]{\frac{32}{108}} = \frac{72}{108}.$$

296 *Si le dénominateur seul d'une fraction est un cube parfait, on extrait la racine du numérateur à moins d'une unité, puis la racine exacte du dénominateur; on divise les deux racines dans cet ordre. La fraction ainsi obtenue est la racine cubique de la fraction donnée à moins de $\frac{1}{d}$, d étant le dénominateur de cette racine.*

Ex. : $\frac{843}{1728}$, $1728 = 12^3$.

La racine de 847 est 9 à moins d'une unité.

$$9^3 < 843 < 10^3.$$
$$\frac{9^3}{12^3} < \frac{843}{1728} < \frac{10^3}{12^3}$$
$$\left(\frac{9}{12}\right)^3 < \frac{843}{1728} < \left(\frac{10}{12}\right)^3.$$

297. *Si le dénominateur n'est pas un cube, on le rend cube parfait soit en opérant comme a été indiqué tout à l'heure, n° 270, soit en multipliant les deux termes par un nombre plus simple que le carré du dénominateur* (Pour plus de commodités, on peut décomposer le dénominateur en ses facteurs, *V.* le n° 287).

Avant d'extraire la racine cubique d'une fraction, il est bon de la réduire à sa plus simple expression.

298. NOMBRES FRACTIONNAIRES. Pour extraire la racine cubique d'un nombre formé d'un entier et d'une fraction, on joint l'entier à la fraction et on applique une des règles précédentes concernant les fractions.

299. NOMBRES DÉCIMAUX. On observe que l'unité suivie d'un nombre de zéros multiple de 3 est un cube parfait, et qu'elle n'en est pas un dans le cas contraire. Cela posé, voici la règle :

1er CAS. *Quand le nombre des chiffres décimaux est multiple de 3, on supprime la virgule, on extrait la racine cubique du nombre résultant à moins d'une unité; cette racine trouvée, on sépare sur la droite 3 fois moins de chiffres décimaux qu'il n'y en avait dans le nombre donné.*

2e CAS. *Quand le nombre des chiffres décimaux n'est pas multiple de 3, on ajoute 1 ou 2 zéros pour qu'il le devienne, puis on applique la règle du 1er* CAS *auquel on est ramené.*

L'une et l'autre règle se prouvent et démontrent en mettant le nombre donné sous la forme d'une fraction, et appliquant ce qui a été dit pour les fractions ordinaires.

Approximation des racines cubiques.

DÉFINITIONS. Elles sont les mêmes que pour les carrés; mettez le mot cube à la place de carré dans celles du n° 274.

300. RÈGLE. *Pour avoir la racine cubique d'un nombre donné quelconque N à moins d'une unité, on détermine le plus grand entier qui y est contenu (la partie entière); on extrait la racine cubique de ce nombre entier à moins d'une unité, et on prend cette racine pour celle du nombre proposé à moins d'une unité.*

Ex. : $\sqrt[3]{67\frac{11}{17}}$ à moins d'une unité $= \sqrt[3]{67}$ à moins d'une unité.

Même raison qu'au n° 275.

RÈGLE. *Pour extraire la racine cubique d'un nombre donné à moins d'une partie aliquote quelconque de l'unité, à moins de $\frac{1}{n}$, on multiplie ce nombre donné par le cube du dénominateur* n, *de la fraction qui marque l'approximation; on extrait à moins d'une unité la racine du produit ainsi obtenu, et cette racine trou-*

vée, on la divise par le dénominateur même de la fraction d'approximation. Le résultat est la racine approchée demandée.

Ex. : Trouver la racine cubique d'un nombre N à moins de $\frac{1}{100}$. Même raisonnement que pour le carré, n° 276. Mettez des cubes au lieu de carrés.

Même observation qu'au n° 276.

On peut aussi vérifier *à posteriori* pour les cubes comme pour les carrés. (On peut répéter ici ce qui est fait n° 276, en mettant des cubes au lieu de carrés.)

Évaluer une racine cubique à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.

301. RÈGLE. *Pour avoir la racine cubique d'un nombre quelconque à moins d'une unité décimale donnée, $\frac{1}{10^m}$, on multiplie le nombre par 10^{3m}, c'est-à-dire par l'unité suivie de 3 fois autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux dans la fraction décimale qui indique l'approximation; on extrait la racine cubique du produit à moins d'une unité; cette racine trouvée, on sépare sur la droite autant de chiffres décimaux qu'on en demande à cette racine.*

Ceci n'est que l'application de la règle générale précédente. Prenant les mêmes exemples que pour les racines carrées, on peut faire exactement les mêmes remarques faites à propos de ces racines carrées, page 207; il suffit de dire *cube* au lieu de *carré*, 3 fois autant de zéros, ou 3 fois autant de chiffres décimaux, au lieu de 2 fois, etc.

Les règles précédentes concernant l'approximation des racines cubiques s'appliquent à des nombres quelconques.

Nous pourrions indiquer une méthode abrégée pour extraire la racine cubique comme pour la racine carrée, nous préférons nous occuper de choses plus utiles.

302. *Erreurs relatives du cube et de la racine cubique.*

$$A^3 = (A' + a.\,A)^3 = A'^3 + 3\,A'^2 \times a.\,A + 3\,A' \times a^2.\,A^2 + a^3A^3.$$

$\frac{A^3 - A'^3}{A^3} = 3a \cdot \frac{A'^2}{A^2} + 3a^2 \frac{A'}{A} + a^3 = 3a - 3a^2 + a^3$. (On a remplacé $\frac{A'}{A}$ par $1 - a$). *V.* le n° 281.

Négligeant $a^3 - 3a^2$ à côté de $3a$, on prend $\frac{A'^3 - A^3}{A^3} = 3a$.

En comparant $\frac{A - A'}{A} = a$ et $\frac{A'^3 - A^3}{A^3} = 3a$, on conclut que l'*erreur relative de la racine cubique est trois fois moindre que celle du cube.*

Il résulte de là que pour obtenir à moins d'une unité la racine cubique d'un nombre entier ou décimal, si cette racine doit avoir n chiffres, il suffit de connaître les $n + 1$ premiers chiffres à gauche de ce nombre; on fait suivre ces $n + 1$ chiffres d'autant de zéros qu'il doit y avoir de chiffres en plus dans la partie entière de ce nombre, et on extrait la racine cubique du nombre résultant, à moins d'une unité.

Pour démontrer l'exactitude de cette règle, il suffit d'observer que l'on prend ainsi du nombre donné que nous pouvons nommer A^3, une valeur approchée A'^3, telle que $\frac{A^3 - A'^3}{A^3} < \frac{1}{10^n}$; donc l'erreur relative de la racine, $\frac{A - A'}{A} < \frac{1}{3 \times 10^n}$; cette racine sera donc déterminée à moins d'une unité de son $n^{ième}$ chiffre, de gauche à droite; or c'est justement le chiffre de ses unités simples; donc elle sera approchée à moins d'une unité. On aura soin d'augmenter d'une unité le dernier chiffre ainsi trouvé.

Chercher la racine cubique d'un nombre donné, à moins de $\frac{1}{10^m}$, se ramène à trouver la racine cubique de $A \times 10^{3m}$, à moins d'une unité. On pourra donc appliquer ce qui précède dans ce cas général, en déterminant le nombre des chiffres de la partie entière de $A \times 10^{3m}$. Ce moyen d'abréviation doit être employé surtout quand les chiffres de $A \times 10^{3m}$ s'obtiennent par des calculs préliminaires à l'extraction ds la racine cubique.

CHAPITRE V.

APPLICATION DE L'ARITHMÉTIQUE A DIVERS PROBLÈMES GÉNÉRAUX.

DES RAPPORTS. — RAPPORTS DES GRANDEURS CONCRÈTES.

303. *On appelle* RAPPORT *de deux nombres le quotient de la division du premier nombre par le second.*

Ex. : le rapport de 12 à 4 est $12 : 4 = 3$; celui de 30 à 8 est $\frac{30}{8}$; celui de $\frac{4}{5}$ à $\frac{8}{9}$ est le quotient effectué de ces deux fractions, $\frac{4}{5} : \frac{8}{9} = \frac{4 \times 9}{5 \times 8} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$. (Le rapport de deux nombres fractionnaires équivaut toujours à celui de deux nombres entiers.)

Un rapport s'indique comme un quotient ou une fraction ; $12 : 3$ ou $\frac{12}{3}$; $30 : 8$ ou $\frac{30}{8}$; $\frac{4}{5} : \frac{8}{9}$; lisez 12 *divisé* par 3, etc.

Les deux nombres dont on prend le rapport sont les *termes* du rapport ; le 1[er] nombre s'appelle le numérateur du rapport ; le second en est le *dénominateur* (*).

(*) Suivant le programme, nous abandonnons ici les dénominations d'antécédent et de conséquent que l'on a données jusqu'ici aux deux termes d'un rapport.

Nous faisons dès à présent, en arithmétique, ce que l'on fait depuis longtemps en algèbre. Nous assimilons complétement le rapport à une fraction *considérée comme le quotient de la division de son numérateur par son dénominateur*. Quand les deux termes du rapport sont des nombres entiers, il n'y a aucune différence entre un rapport et une fraction ordinaire ; ayant observé que les propriétés essentielles des fractions subsistent quand le numérateur et le

Un rapport étant le quotient de la division de son premier terme par le second, on voit que le mot numérateur remplace ici le mot *dividende* pris dans son sens le plus étendu; le mot *dénominateur* remplace de même le mot *diviseur*; il importe donc de remarquer que le *numérateur* et le *dénominateur* d'un rapport ne sont pas toujours des nombres entiers, mais peuvent être des nombres quelconques, entiers, fractionnaires ou incommensurables. Ces mots rapport, *numérateur*, dénominateur, étant absolument synonymes de *quotient*, *dividende* et diviseur, nous pouvons remplacer les derniers par les premiers dans l'énoncé de chacune des propriétés principales des quotients ou fractions, généralisées, n° 153, 6°, 7°, 8°, et n° 154.

304. Nous dirons donc :

1° *Quand on multiplie ou divise le* numérateur seul *d'un rapport par un nombre quelconque, on multiplie ou divise le rapport par ce nombre* (153, 6°).

2° *Quand on multiplie ou divise le* dénominateur *seul d'un rapport par un nombre quelconque, on divise ou multiplie le rapport par ce nombre* (153, 7°).

3° *Quand on multiplie ou divise les deux termes d'un rapport par un même nombre quelconque, le rapport ne change pas* (153, 8°).

305. THÉORÈME. *Dans une suite de rapports égaux, la somme des numérateurs et celle des dénominateurs forment un rapport égal aux rapports proposés.*

C'est le théorème du n° 154, page 101. Si on veut le démontrer sur des nombres, ce qui est le mieux, on n'a qu'à substituer le mot rapport à celui de fraction dans la démonstration du n° 154, qui est tout à fait générale; car elle s'appuie uniquement sur la définition générale du rapport. Nous la répétons ici sur des lettres pour ceux qui le préféreront.

$$a : b = c : d = e : f = g : h.$$

On aura $(a+c+e+g) : b+d+f+h = a : b$ ou $c : d$, etc.

---

dénominateur sont remplacés par des nombres fractionnaires, on ne trouvera aucun inconvénient à faire tout de suite ce qu'on est obligé de faire en algèbre, à regarder dans tous les cas comme synonymes ou signifiant la même chose, ces trois mots : *quotient*, *rapport*, *fraction*.

En effet, par définition, on a

$$
\begin{aligned}
& & a &= (a:b) \times b \\
c &= (c:d) \times d \quad \text{ou} & c &= (a:b) \times d \\
e &= (e:f) \times f \quad \text{ou} & e &= (a:b) \times f \\
g &= (g:h) \times h \quad \text{ou} & g &= (a:b) \times h.
\end{aligned}
$$

D'où par addition $a+c+e+g = (a:b) \times (b+d+f+h)$.

En divisant de part et d'autre par $b+d+f+h$, on trouve

$$(a+c+e+g):(b+d+f+h) = a:b.$$

306. On appelle rapport de deux grandeurs de même espèce le nombre qui *exprime la première de ces deux grandeurs quand la seconde est prise pour unité.*

Pour trouver le rapport de deux grandeurs données, on cherche d'abord si la seconde est contenue exactement un nombre entier de fois dans la première.

Supposons que cela arrive, et que, par exemple, la seconde grandeur soit contenue 15 fois dans la première. Le rapport des deux grandeurs est 15.

Si la 2e grandeur n'est pas contenue exactement, un nombre entier de fois dans la 1re, on partage cette 2e grandeur successivement en 2, 3, 4, 5..... parties égales, et on mesure chaque fois la première grandeur avec une des parties obtenues, jusqu'à ce que l'on trouve que l'une de ces parties aliquotes de la seconde grandeur est contenue exactement un nombre entier de fois dans la première. Supposons que $\frac{1}{7}$ de la seconde grandeur soit contenue 15 fois exactement dans la première; si cette 2e grandeur est prise pour unité, la première doit s'exprimer par $\frac{15}{7}$ (110); ce nombre $\frac{15}{7}$ est le rapport des 2 grandeurs.

On appelle *commune mesure* de deux grandeurs de même espèce une troisième grandeur de même espèce, qui est contenue un nombre entier de fois dans chacune des grandeurs proposées.

2e DÉFIN. : *Le rapport de deux grandeurs de même espèce n'est autre chose que le rapport de deux nombres qui expriment les deux*

grandeurs proposées mesurées avec la même unité, ou commune mesure quelconque.

Cette deuxième définition rentre dans la première.

Supposons que, partant de la 1re définition, on ait trouvé que le rapport de 2 grandeurs est $\frac{30}{14}$; cela signifie que 1/14 de la 2e grandeur est contenu 30 fois dans la première; cette quatorzième partie de la 2e grandeur est une commune mesure des deux grandeurs, qui, prise pour unité, se trouvera contenue 30 fois dans la première et 14 fois dans la deuxième; en mesurant avec cette unité, on trouvera donc que $\frac{30}{14}$ est le rapport des 2 grandeurs, suivant la deuxième définition.

Réciproquement, supposons qu'en mesurant les 2 grandeurs avec une commune mesure quelconque, on ait trouvé, suivant la 2e définition, que $\frac{30}{14}$ est le rapport de 2 grandeurs : cela signifie que cette commune mesure a été trouvée contenue exactement 30 fois dans la première et 14 fois dans la seconde; cette commune mesure est donc la quatorzième partie de la seconde grandeur; la première grandeur contenant 30 fois le quatorzième de la seconde doit être exprimée par la fraction $\frac{30}{14}$ quand cette deuxième grandeur est prise pour unité (110). $\frac{30}{14}$ est donc le rapport des deux grandeurs, suivant la 1re définition.

Les deux définitions rentrent donc bien l'une dans l'autre.

307. On peut s'appuyer sur l'une ou l'autre au besoin pour étudier les propriétés des rapports et les soumettre au calcul.

Il résulte de la 1re que le rapport de deux grandeurs est un nombre unique bien déterminé, qu'on trouverait toujours le même si partant de la 2e définition, on l'évaluait successivement à l'aide de diverses unités ou communes mesures.

Il résulte de la seconde définition, que toutes les propriétés du rapport de deux nombres appartiennent au rapport de deux grandeurs de même espèce. Tout ce que nous avons dit du rapport de deux nombres, (définitions et propriétés), s'applique donc

littéralement au rapport de deux grandeurs; nous ne le répéterons pas.

308. *Il peut arriver qu'aucune partie aliquote de la 2e grandeur ne soit contenue un nombre entier de fois dans la 1re*, ou, ce qui revient au même, *que les deux grandeurs n'aient pas de commune mesure.* Alors le rapport des 2 grandeurs ne peut s'exprimer ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire.

On dit alors que *les deux grandeurs sont incommensurables entre elles; leur rapport est un nombre incommensurable qui ne peut être évalué exactement, mais seulement avec une approximation d'ailleurs aussi grande que l'on veut.*

On appelle rapport de denx grandeurs quelconques à moins d'une unité le plus grand nombre entier de fois que la 2e est contenue dans la 1re.

On appelle rapport de deux grandeurs à moins de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,... $\frac{1}{n}$ un nombre composé d'autant de demies, de tiers, de quarts... de $n^{\text{ièmes}}$, que la première grandeur contient de fois au plus la moitié, le tiers, le quart, la $n^{\text{ième}}$ partie de la 2e grandeur.

On peut évaluer à moins d'une fraction donnée quelconque $\frac{1}{n}$ le rapport de deux grandeurs de même espèce, commensurables ou incommensurables entre elles. En effet, cela revient à trouver le plus grand nombre entier de fois que la $n^{\text{ième}}$ partie de la 2e grandeur est contenue dans la première; or toute grandeur considérée en mathématiques est telle que l'on peut toujours savoir le plus grand nombre entier de fois qu'elle contient une grandeur quelconque de même espèce prise pour unité.

Supposons qu'on veuille évaluer en fraction décimale le rapport de deux grandeurs quelconques de même espèce (Ex. : Deux longueurs dont l'une serait le mètre).

On cherche d'abord le plus grand nombre entier de fois que la seconde grandeur est contenue dans la 1re. Supposons, pour fixer les idées, qu'elle y soit contenue 15 fois; 15 est la partie entière du nombre décimal cherché; c'est la valeur de ce rapport à moins d'une unité. Si ce nombre de fois la 2e grandeur n'est pas toute la 1re, on partage la 2e grandeur en 10 parties égales; puis on cherche combien il y a de ces dixièmes dans la partie non encore mesurée de la 1re grandeur. Supposons qu'il y en ait 7, et un reste; 15,7 est le rapport des 2 grandeurs à moins de 0,1.

Pour continuer, on subdivise un dixième de la 2e grandeur en dix centièmes, et on cherche combien il y a de ces centièmes dans le reste susdit de la 1re grandeur; supposons qu'il en contienne 3 avec un reste; 15,73 est le rapport des deux grandeurs à moins de 0,01. On continue de la même manière jusqu'à ce que l'une des parties décimales successives de la 2e grandeur soit contenue exactement dans le reste correspondant de la 1re, ou bien qu'on ait obtenu autant de chiffres décimaux du rapport que l'on veut (*).

(*) *Ce rapport lui-même de la 1re grandeur donnée à la 2e est la limite du*

On peut évaluer de même le rapport des deux grandeurs données à moins de $\frac{1}{2}$, de $\frac{1}{4}$, de $\frac{1}{16}$, etc..., ou à moins de $\frac{1}{3}$, de $\frac{1}{6}$, de $\frac{1}{12}$, etc...

309. Définition. *Deux rapports incommensurables sont égaux quand ils contiennent le même nombre de fois la même partie aliquote quelconque de l'unité ;* autrement dit, *lorsqu'en les évaluant tous deux séparément avec la même approximation quelconque, on trouve toujours le même nombre.*

DES GRANDEURS QUI VARIENT DANS LE MÊME RAPPORT OU DANS UN RAPPORT INVERSE.

310. Dans un grand nombre de questions, il existe entre les grandeurs considérées une dépendance telle que les grandeurs

---

nombre décimal 17,73... *continué indéfiniment, s'il y a lieu, suivant la méthode indiquée ci-dessus.*

Cette conclusion se fonde sur ce que la 2e grandeur étant prise pour unité, les nombres ainsi obtenus successivement, 15 ; 15,7 ; 15,73 ; etc., expriment les valeurs exactes d'une série de grandeurs croissantes qui, toutes plus petites que la 1re grandeur donnée, finissent par en différer aussi peu que l'on veut ; cette 1re grandeur proposée est la limite de ces grandeurs successives (190) ; donc le nombre qui l'exprime est la limite des nombres qui expriment ces grandeurs.

Au lieu de partager la 2e grandeur en 10, 100, 1000,... parties, on pourrait la subdiviser en 2, 4, 8, 16... parties ; ou bien encore en 3, 6, 12, 24... parties, etc. ; on arriverait à la même conclusion que pour les fractions décimales. Le rapport des 2 grandeurs données doit être considéré comme la limite des nombres fractionnaires qui composeraient chaque série. Ce rapport ne pourra être regardé comme un nombre bien déterminé que si toutes ces limites sont un seul et même nombre. Or cela est évident ; en effet, considerons deux suites quelconques de ces nombres fractionnaires :

$$\frac{a}{1} \quad \frac{a'}{10} \quad \frac{a''}{100} \quad \frac{a'''}{1000}, \text{ etc.}$$

$$\frac{b}{1} \quad \frac{b'}{2} \quad \frac{b''}{4} \quad \frac{b'''}{8}, \text{ etc.}$$

La 2e grandeur étant prise pour unité, un terme quelconque de l'une ou l'autre série exprime exactement la valeur d'une grandeur déterminée, moindre que la 1re grandeur donnée ; et pouvant en différer aussi peu que l'on veut ; en prenant deux termes éloignés, un dans chaque série, on aura deux nombres dont la différence sera aussi petite que l'on voudra ; car ces deux nombres exprimeront les valeurs de 2 grandeurs déterminées, toutes deux inférieures à la 1re grandeur d'aussi peu que l'on voudra, et, par suite, *à fortiori*, différant l'une de l'autre aussi peu que l'on voudra. Les termes des 2 suites devant à la fin différer d'un nombre moindre que tout nombre donné, ont la même limite (190).

d'une espèce varient dans le même rapport que les grandeurs d'une autre espèce, ou dans un rapport inverse.

On dit que deux grandeurs varient dans le même rapport ou en raison directe l'une de l'autre, quand l'une variant et devenant un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, l'autre devient nécessairement ce nombre de fois plus grande ou plus petite.

Ou bien encore, ce qui revient au même :

On dit que des grandeurs de deux espèces varient dans le même rapport, ou en raison directe les unes des autres, quand le rapport de deux grandeurs quelconques de la 1re espèce est toujours égal au rapport des deux grandeurs correspondantes de la seconde espèce (*).

Ex. : Le prix d'une marchandise qui se pèse varie dans le même rapport que le poids de cette marchandise, est proportionnel au poids de cette marchandise; 2, 3, 4... fois plus de kilogrammes de cette marchandise se payent 2, 3, 4.... *m* fois plus (*m* étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire).

Le prix d'une étoffe détachée d'une certaine pièce varie dans le même rapport que la longueur de cette étoffe ; si une personne en achète 2, 3, 4... *m* fois plus de mètres qu'une autre, la 1re personne donnera 2, 3, 4... *m* fois plus d'argent que la seconde.

Le nombre de mètres d'une certaine étoffe fabriquée par les ouvriers d'une manufacture varie dans le même rapport que le nombre de ces ouvriers, toutes les autres circonstances restant d'ailleurs les mêmes.

On dit que deux grandeurs varient dans un rapport inverse, ou en raison inverse l'une de l'autre, quand l'une d'elles variant et devenant un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, l'autre devient nécessairement ce nombre de fois plus petite ou plus grande.

Ou bien encore, ce qui revient au même :

On dit que des grandeurs de deux espèces varient en rapport inverse ou en raison inverse les unes des autres, quand le rapport de deux grandeurs quelconques de la 1re espèce est constamment égal au rapport RENVERSÉ, *autrement dit, au rapport* INVERSE *des grandeurs correspondantes de la seconde espèce.*

(*) On dit dans le même sens que les grandeurs considérées varient proportionnellement, sont proportionnelles les unes aux autres.

Ex. : Le nombre de jours qu'il faut à des ouvriers pour faire un certain ouvrage varie en rapport inverse du nombre d'heures qu'ils y travaillent chaque jour ; s'ils y travaillent 2, 3, 4... *m* fois plus d'heures par jour, il leur faudra 2, 3, 4... *m* fois moins de jours pour l'achever (*m* est un nombre quelconque, entier ou fractionnaire) ; si le rapport de deux nombres d'heures est 3 ou $\frac{2}{3}$, par ex. : celui des nombres de jours correspondants est $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{2}$.

311. Il arrive souvent que, dans la même question, les grandeurs d'une certaine espèce doivent être ainsi comparées successivement à des grandeurs de diverses espèces.

Ex. : 15 *ouvriers, travaillant* 9 *heures par jour, ont employé* 32 *jours à confectionner* 2400 *mètres d'une étoffe ayant* 1^m^,2 *de large ;*

Combien faudra-t-il de jours à 24 *ouvriers travaillant* 8 *heures par jour pour confectionner* 3600 *mètres d'une étoffe absolument semblable, mais n'ayant que* 1^m^,5 *de large.*

Dans cette question, pour trouver le nombre de jours demandé, il y aura lieu de tenir compte successivement de la variation du nombre des ouvriers, du nombre des heures du travail journalier, de la longueur et de la largeur de l'étoffe fabriquée. Le nombre des jours comparé séparément à chacune des autres espèces de grandeurs varie dans le même rapport que celles qui le suivent dans la 1re partie de notre énoncé, et dans le rapport inverse de celles qui le précèdent.

Dans une pareille question, le nombre de jours ne varie exactement dans le même rapport que la longueur de l'étoffe, par ex.: que si ces deux grandeurs varient seules, les autres grandeurs restant les mêmes lors de cette comparaison. C'est dans ce sens que nous avons employé le mot *successivement*. V. n° 316; 3e probl.

312. Il n'appartient pas à l'arithmétique de démontrer que certaines grandeurs varient dans le même rapport ou dans un rapport inverse ; c'est un fait qui a sa raison d'être en dehors de cette science, et qu'elle admet comme devant servir à la solution de la question proposée.

La géométrie, la mécanique, la physique, par exemple, font connaître des grandeurs qui varient dans le même rapport ou en

rapport inverse. Il est évident que le prix d'une étoffe qu'un marchand détache d'une certaine pièce doit être proportionnel à la longueur de cette étoffe. Il est également évident que le nombre de jours employé par des ouvriers pour faire un ouvrage déterminé varie dans le rapport inverse du nombres des heures qu'ils y consacrent chaque jour.

313. m *étant un nombre entier quelconque, s'il est acquis qu'une grandeur d'une certaine espèce devenant* 1, 2, 3... m *fois plus grande ou plus petite, la grandeur correspondante d'une autre espèce devient* 1, 2, 3... m *fois plus grande ou plus petite, on doit admettre, dans le sens le plus général, que les grandeurs de ces deux espèces varient constamment dans le même rapport.*

Par ex. : Soient a et b deux grandeurs de la 1re espèce, a' et b' les grandeurs correspondantes de l'autre espèce; si $a : b = \frac{3}{5}$, on aura aussi $a' : b' = \frac{3}{5}$. En effet, d'après l'hypothèse, la grandeur b de la 1re espèce correspondant à la grandeur b' de la 2e, la grandeur $3b$ aura pour correspondante $3b'$; $3b$ ayant pour correspondante $3b'$, la grandeur $a = \frac{3b}{5}$, 5 fois moindre que $3b'$ aura pour correspondante $\frac{3b'}{5}$, 5 fois moindre que $3b'$. Mais a' est la correspondante de a; donc $a' = \frac{3b'}{5}$; d'où $a' : b' = \frac{3}{5} = a : b$

314. m *étant un nombre entier quelconque, s'il est acquis qu'une grandeur d'une certaine espèce devenant* 1, 2, 3,... m *fois plus grande ou plus petite, la grandeur correspondante d'une autre espèce devient* 1, 2, 3,... m *fois plus petite ou plus grande, on doit admettre, dans le sens le plus général, que les grandeurs des deux espèces varient en rapport inverse.*

Par ex. : Soient a et b deux grandeurs de la 1re espèce; a' et b' les grandeurs correspondantes de l'autre espèce; si $a : b = \frac{3}{5}$, on aura $a' : b' = \frac{5}{3}$. En effet, d'après l'hypothèse, la grandeur b de la 1re espèce correspondant à la grandeur b' de la seconde, à $3b$ correspondra $\frac{b'}{3}$, et à la grandeur $a = \frac{3b}{5}$, 5 fois moindre que $3b$ correspondra $\frac{5b'}{3}$, 5 fois plus grande que $\frac{b'}{3}$; mais a' est la grandeur correspondante à a; donc $a' = \frac{5b'}{3}$, ou $a' : b' = \frac{5}{3}$.

Nous allons résoudre par la méthode dite *de réduction à l'unité* les questions les plus simples où on rencontre des grandeurs qui varient en rapport direct ou en rapport inverse les unes des autres.

DES PROBLÈMES ANCIENNEMENT CONNUS SOUS LE NOM DE RÈGLES DE TROIS SIMPLES OU COMPOSÉES.

Méthode de réduction à l'unité

315. Les problèmes que nous allons étudier se distinguent par le caractère général que voici : Les grandeurs considérées, données et inconnue, s'y partagent en 2 séries parallèles telles que, à chaque grandeur de l'une des séries en correspond une de même espèce dans l'autre ; de plus, une de ces grandeurs étant mise successivement en regard de chacune des grandeurs autres que sa correspondante susdite, il arrive toujours que les deux grandeurs mises en regard varient, soit dans le même rapport, soit en rapport inverse.

De là résulte, pour écrire immédiatement la solution d'un problème de ce genre, une règle générale très-simple que nous allons faire ressortir de l'étude raisonnée de quelques-uns de ces problèmes, traités par la méthode dite *de réduction à l'unité.*

316. 1er PROBLÈME. 250 *mètres d'une étoffe ont coûté* 4500$^{fr.}$; *combien coûteront* 372 *mètres de la même étoffe?*

Désignons par x le nombre de mètres cherché :

$$\begin{array}{ll} 250^{\text{mèt.}}, & 4500^{\text{fr.}} \\ 372^{\text{mèt.}}, & x^{\text{fr.}} \end{array}$$

250$^{\text{mèt.}}$ coûtant 4500$^{\text{fr.}}$, *un* seul mètre coûte 250 fois moins, ou $\frac{4500}{250}$; 372$^{\text{mèt.}}$ coûteront 372 fois plus que 1 mètre, c'est-à-dire :

$$\frac{4500 \times 372}{250} = 4500 \times \frac{372}{250} = x \ (1).$$

REMARQUE. *Plus il y a de mètres, plus ils coûtent ;* le nombre des mètres et le prix de l'étoffe varient dans le même rapport.

2e PROBLÈME. *Un charpentier avait amené* 588 *planches de* 30 *centimètres de largeur pour clore un terrain ; le propriétaire veut des planches de* 35 *centimètres de large. Combien en faudra-t-il?*

$$\begin{array}{ll} 588^{\text{planches}}, & 30^{\text{centim. de large.}} \\ x^{\text{ pl.}} & 35^{\text{cent.}} \end{array}$$

Si les planches employées, au lieu de 30 centimètres de large, n'avaient *qu'un* centimètre de large, il en faudrait évidemment 30 fois plus, c'est-à-dire 588 × 30 ; mais si, au lieu de 1 centimètre, les planches ont 35 centimètres de large, il faudra 35 fois moins de planches ; c'est-à-dire :

$$\frac{588 \times 30}{35} = 588 \times \frac{30}{35} = x \text{ (2)}.$$

REMARQUE. *Plus les planches sont larges, moins il en faut;* le nombre des planches nécessaires varie en raison inverse de la largeur des planches.

3ᵉ PROBLÈME. 15 *ouvriers, travaillant* 8 *heures par jour, ont employé* 32 *jours à confectionner* 2400 *mètres d'une étoffe ayant* 1,2$^{\text{mèt.}}$ *de large; combien* 24 *ouvriers, travaillant* 9 *heures par jour, emploieront-ils de jours à confectionner* 3600$^{\text{mèt.}}$ *d'une étoffe ayant* 1,5$^{\text{mèt.}}$ *de large?*

Soit x le nombre de jour cherché.

$15^{\text{ouv.}}$,	$9^{\text{h.}}$,	$32^{\text{j.}}$,	$2400^{\text{m.}}$,	$1^{\text{m.}}2.$
$24^{\text{ouv.}}$,	$8^{\text{h.}}$,	$x^{\text{j.}}$,	$3600^{\text{m.}}$,	$1^{\text{m.}}5.$

Un seul ouvrier, travaillant 9 heures par jour pour confectionner 2400 mètres, etc., emploiera 15 fois plus de jours que 15 ouvriers, c'est-à-dire, $32^{\text{j.}} \times 15$; 24 ouvriers pour faire le même ouvrage, en travaillant 9 heures par jour, emploieront 24 fois moins de jours qu'*un seul*, c'est-à-dire :

$$\frac{32 \times 15}{24} = 32 \times \frac{15}{24} = x' \text{ (3)}.$$

REMARQUE. *Plus il y a d'ouvriers, moins il faut de jours;* le nombre des jours et le nombre des ouvriers varient en rapport inverse.

Ces 24 ouvriers, travaillant *une* heure par jour au lieu de 9, pour faire 2400$^{\text{m.}}$ d'étoffe, etc., emploieront 9 fois plus de jours, $x' \times 9$; s'ils travaillent 8 heures par jour au lieu d'*une*, ils emploieront 8 fois moins de jours à faire cet ouvrage, ou :

$$\frac{x'^{\text{j.}} \times 9}{8} = x' \times \frac{9}{8} = 32 \times \frac{15}{24} \times \frac{9}{8} = x'' \text{ (4)}.$$

REMARQUE. *Plus les ouvriers travaillent d'heures par jour, moins ils mettent de jours*; le nombre des jours et le nombre des heures varient en raison inverse.

24 ouvriers, travaillant 8 heures par jour, emploient x'' jours pour faire $2400^{m.}$ d'une étoffe ayant $1^{m.},2$; si, au lieu de $2400^{m.}$, ces ouvriers ne faisaient qu'*un* mètre de la même étoffe, ils emploieraient 2400 fois moins de jours, c'est-à-dire : $\frac{x''^{j.}}{2400}$; mais, pour faire $3600^{m.}$, ils emploieront 3600 fois plus de jours que pour en faire un seul, c'est-à-dire :

$$\frac{x'' \times 3600}{2400} = 32 \times \frac{15}{24} \times \frac{9}{8} \times \frac{3600}{2400} = x''' \ (5).$$

REMARQUE. *Plus il y a de mètres à faire, plus il faut de jours*; le nombre de jours et la longueur de l'étoffe varient dans le même rapport.

Enfin, si au lieu de $1^{m.}.2$, ou 12 décimètres de large, les $3600^{m.}$ d'étoffe fabriqués en $x''^{j.}$ par 24 ouvriers, travaillant 8 heures par jour, n'avaient qu'un décimètre de large, les ouvriers emploieraient 12 fois moins de jours pour la confectionner, c'est-à-dire, $\frac{x''}{12}$; l'étoffe ayant 15 décimètres de large au lieu d'un, les ouvriers emploieront 15 fois plus de jours, c'est-à-dire :

$$x'' \times \frac{15}{12} = 32 \times \frac{15}{24} \times \frac{9}{8} \times \frac{3600}{2400} \times \frac{1,5}{1,2} = x \ (6).$$

REMARQUE. *Plus l'étoffe est large, plus il faut de jours pour la fabriquer*; le nombre de jours et la largeur de l'étoffe varient dans le même rapport.

317. La marche à suivre pour résoudre ces problèmes par le raisonnement se voit aisément ; il est inutile que nous la formulions plus explicitement.

Ayant rangé les grandeurs données et l'inconnue sur deux lignes horizontales, l'inconnue en bas, en faisant correspondre 2 à 2 les grandeurs de la même espèce, on a réduit successivement *à l'unité* de son espèce chaque grandeur de la première ligne, qui ne correspond pas à l'inconnue, déterminant en même temps ce que de-

vient, à chaque réduction, la grandeur donnée de même espèce que l'inconnue. Mais chaque fois qu'on a eu réduit à l'unité une grandeur de la 1re ligne, avant d'en réduire une autre, on est remonté de l'*unité* à la grandeur correspondante de la seconde ligne.

On peut remarquer qu'on est arrivé à la solution du 3e problème en résolvant successivement 4 problèmes simples du même genre que les 2 premiers problèmes traités. Les 2 premiers problèmes sont de ceux qu'on appelait règles de trois *simples ;* le dernier, de ceux qu'on appelait règles de trois *composées.*

318. Nous avons dit qu'il existe une règle générale pour écrire immédiatement la solution de tout problème du même genre que les précédents. Pour la trouver, il suffit de jeter les yeux sur la fin de chacun des problèmes simples, à ces numéros (1), (2), (3), (4), (5), (6); *solution* et REMARQUE.

Supposons les quantités de l'énoncé disposées comme il a été indiqué sur deux lignes horizontales, l'inconnue en bas. Cela posé, dans chaque problème simple, *l'inconnue a pour valeur la grandeur donnée qui lui correspond, multipliée par le rapport des deux autres grandeurs données, divisées dans cet ordre : celle d'en bas par celle d'en haut, quand ces grandeurs varient dans le même rapport que les grandeurs de l'espèce de l'inconnue, celle d'en haut par celle d'en bas quand ces grandeurs et l'inconnue varient en raison inverse.*

Dans la règle de trois composée, l'inconnue de chaque problème simple devient une donnée du problème simple suivant; de sorte que les rapports se multiplient consécutivement, et finalement, l'observation, telle qu'elle est indiquée plus haut, des 3 problèmes qui précèdent conduit à cette règle générale :

319. RÈGLE GÉNÉRALE. *Les données de la question et l'inconnue étant disposées sur deux lignes horizontales, de telle sorte que les grandeurs de même espèce se correspondent, la valeur de l'inconnue se forme en multipliant la grandeur donnée qui lui correspond par les rapports des autres grandeurs données correspondantes, divisées une par une, dans cet ordre : celle d'en bas par celle d'en haut quand ces grandeurs et la grandeur de l'espèce de l'inconnue varient dans le même rapport* (quant à PLUS répond PLUS) ; *celle d'en haut par celle d'en bas, au contraire, quand ces grandeurs et celle*

de même espèce que l'inconnue varient en raison inverse (quand à PLUS *répond* MOINS) (*).

320. Donc les problèmes proposés se résoudront simplement ainsi :

1er PROBLÈME. $250^{\text{mètres}}$ $4500^{\text{fr.}}$
372 x

Plus il y a de mètres, plus ils coûtent; on prend le rapport de bas en haut), et on multiplie la donnée $4500^{\text{fr.}}$ par 372/250.

$$x = 4500^{\text{fr.}} \times \frac{372}{250}.$$

2e PROBLÈME. 588^{planches} $30^{\text{centim. de large}}$
$x^{\text{pl.}}$ $35^{\text{cent.}}$

Plus les planches sont larges, moins il en faut (il faut prendre le rapport de haut en bas) :

$$x = 588^{\text{pl.}} \times \frac{30}{35}.$$

3e PROBLÈME. $15^{\text{ouv.}}$ $9^{\text{heur.}}$ 32^{jours} $2400^{\text{mèt.long.}}$ $1^{\text{mèt.}},2^{\text{larg.}}$
$24^{\text{ouv.}}$ $8^{\text{heur.}}$ x $3600^{\text{mèt.long.}}$ $1^{\text{mèt.}},5^{\text{larg.}}$

(*) La réduction à l'unité telle qu'elle se fait naturellement conduit à la règle générale ci-dessus, facile à appliquer. Il serait peut-être plus régulier qu'on n'eût pas dans la pratique à renverser le rapport des nombres correspondants, alors justement que les grandeurs considérées varient dans le même rapport, et à prendre au contraire le rapport des nombres dans le sens direct (de haut en bas), alors que les grandeurs varient en rapport inverse. Il suffit de modifier légèrement la règle pour corriger l'irrégularité, si on en trouve une : il n'y a qu'à renverser l'ordre des 2 séries de grandeurs, en mettant au premier rang celle qui renferme l'inconnue, de cette façon :

$24^{\text{ouv.}}$ 8^{h} x^{j} $3600^{\text{m. long.}}$ 1^{m} 2 $^{\text{larg.}}$
$15^{\text{ouv.}}$ 9^{h} 32 2400 1 5.

Cela étant, l'inconnue x sera égale à la valeur qui lui correspond inférieurement multipliée par les rapports des autres grandeurs données correspondantes divisées dans le sens direct (celle d'en haut par celle d'en bas) quand ces grandeurs et celle qui correspond à l'inconnue varient dans le même rapport, divisées dans le sens inverse (celle d'en bas par celle d'en haut) dans le cas contraire. Cette règle ne résulte pas du raisonnement aussi directement que l'autre.

1° *Plus* il y a d'ouvriers, *moins* ils emploient de jours ; on écrit $32^{\text{jours}} \times \frac{15}{24}$ (en prenant le rapport de haut en bas). 2° *Plus* les ouvriers travaillent d'heures par jour, *moins* il leur faut de jours; on multiplie le produit précédent par le rapport $\frac{9}{8}$ (formé de haut en bas), ce qui donne $32 \times \frac{15}{24} \times \frac{9}{8}$. 3° *Plus* les ouvriers font de mètres, *plus* il leur faut de jours (on prend le rapport des nombres de mètres de bas en haut); on multiplie par $\frac{3600}{2400}$; ce qui donne $32 \times \frac{15}{24} \times \frac{3600}{2400}$. 4° Enfin, plus l'étoffe a de largeur, *plus* il faut de jours pour la faire... On multipliera par $\frac{1,5}{1,2}$, et on aura définitivement

$$x = 32 \times \frac{15}{14} \times \frac{9}{8} \times \frac{3600}{2400} \times \frac{1,5}{1,2}.$$

Il reste à effectuer ces multiplications; cela fait :

$$x = \frac{32 \times 15 \times 9 \times 3600 \times 1,5}{24 \times 8 \times 2400 \times 1,2}.$$

Dans la pratique, on écrit immédiatement la valeur de x sous la dernière forme, plus commode pour la simplification de la fraction. On écrit d'abord ceci $x = \frac{32}{\qquad\qquad}$, puis on place successivement les nombres donnés comme facteurs les uns au-dessus, les autres au-dessous de la barre, suivant la méthode pratique qui précède.

La règle précédente trouve sa raison d'être dans le procédé même de la réduction à l'unité. Il suffit de considérer ce qui se passe dans chaque problème simple; sa résolution se compose de deux parties : 1° réduction du nombre d'en haut; 2° passage de l'unité au nombre d'en bas. Nous avons 2 cas à considérer :

1er Cas. A *plus* répond *plus*.

Ex. : 250 mètres coûtent 4500 fr.
372m x fr.

Plus il y a de mètres, plus ils coûtent. 1° La réduction à l'unité conduit à rendre le nombre de mètres *d'en haut* un certain nombre de fois plus petit, ou plus exactement, conduit *à diviser ce nombre par lui-même ;* son prix, le nombre de francs, doit devenir ce même nombre de fois plus petit, ou, plus exactement, doit être *divisé* par ce nombre d'en haut, $\frac{4500}{250}$. 2° En passant de l'unité, $1^{\text{mètre}}$, au nombre de mètres *d'en bas*, 372^{m}, on multiplie le nombre de mètres par 372, le prix de l'unité $\frac{4500}{250}$ doit donc être *multiplié* par le nombre *d'en bas* 372; d'où $x = 4500 \times \frac{372}{250}$.

On est nécessairement conduit à faire ce qui est prescrit dans la règle pratique.

2° Cas. A *plus* répond *moins*.

Ex. : Il faut	588 planches	à 30 centim. de large.
	x pl.	à 35 centim. *id.*

Plus les planches sont larges, moins il en faut.

La réduction à l'unité, 1^{planche}, rend le nombre de planches *d'en haut* un certain nombre de fois plus petit, nous conduit à *diviser* ce nombre par lui-même. Dans notre exemple, la largeur $30^{\text{centimètres}}$ doit donc être rendue ce nombre de fois plus grande, ou plus généralement être *multipliée* par ce nombre *d'en haut*; 2° on passe de l'unité, $1^{\text{centimètre}}$, au nombre *d'en bas*, en *multipliant* l'unité par ce nombre *d'en bas;* le nombre actuel de planches 588×30 doit être *divisé* par ce nombre *d'en bas* : $x = 588 \times 30/35$.

Résumé.

1er Cas. $372 = (250 : 250) \times 372$; d'où $x = (4500 : 250) \times 372 = 4500 \times (372 : 250)$.

2° Cas. $35 = (30 : 30) \times 35$; d'où $x = (588 \times 30) : 35 = 588 \times (30 : 35)$.

321. La théorie des règles de trois est finie ; nous donnerons seulement quelques conseils pour la simplification du calcul qu'on doit finalement effectuer. Ayant obtenu la valeur de x sous cette forme :

$$x = \frac{32 \times 15 \times 9 \times 3600 \times 1,5}{24 \times 8 \times 2400 \times 1,2} = \frac{32 \times 15 \times 9 \times 3600 \times 15}{24 \times 8 \times 2400 \times 12},$$

avant d'effectuer les multiplications indiquées, en haut et en bas, on doit supprimer les facteurs communs aux 2 termes de la division ; c'est ici le lieu d'utiliser les caractères de divisibilité par 10, 100, ...; 2, 4, 8, etc...; 3600 et 2400 sont divisibles par 100; ils seront remplacés par 36 et 24, qui sont encore divisibles par 12 ; 32

et 24 admettent le diviseur commun 8 ; 4, qui se trouvera en haut, et 12, qui est en bas, ont le diviseur 4 ; il y a ensuite des facteurs 3 communs. Enfin, toutes réductions faites, on arrive à

$$\frac{15 \times 15 \times 3}{8 \times 2} = \frac{675}{16} = 42^{\text{jours}} + \frac{3}{16}.$$

322. Quand il y a des nombres fractionnaires donnés, il est plus simple de les réduire préalablement au même dénominateur ; car leur rapport se remplace alors par celui de leurs numérateurs. Ex. : Au lieu de 1,5 et 1,2, on met 15 décimètres et 12 décimètres. En général, si une grandeur donnée est exprimée en unités principales et subdivisions de cette unité (Ex. : Des années, des mois, des jours), il convient de réduire cette grandeur et sa correspondante en unités de la plus petite subdivision donnée, et de prendre cette plus petite unité pour unité principale. (Les 2 simplifications équivalent l'une à l'autre.)

DES INTÉRÊTS.

323. L'INTÉRÊT *est le bénéfice que retire de son argent une personne qui le prête.* La somme *prêtée*, on dit quelquefois la somme *placée*, s'appelle CAPITAL.

L'intérêt dépend de la somme prêtée, du temps pendant lequel elle est prêtée, et d'un troisième élément, nommé le taux de l'intérêt.

On nomme TAUX *l'intérêt convenu pour une somme de* 100 *francs placée pendant un an.*

Quelquefois l'intérêt de 100 francs est fixé pour un temps différent d'un an ; mais, à moins d'une mention expresse, on donnera au mot taux la signification ci-dessus.

Le taux s'indique ainsi : 4 pour 0/0, ou 4 p. 0/0 ; lisez 4 pour 100.

L'intérêt est *simple* quand le capital reste le même durant tout le placement.

Les intérêts sont *composés* quand, à la fin de chaque unité de temps convenue, à la fin de chaque année, par exemple, on joint les intérêts au capital pour former un nouveau capital produisant intérêt durant l'unité de temps suivante.

Nous ne nous occuperons actuellement que des intérêts simples.

324. Intérêts simples. Une fois le taux convenu, le calcul des intérêts se fonde sur les principes suivants :

1° *L'intérêt, quand le temps ne change pas, varie dans le même rapport que le capital;*

2° *L'intérêt d'un même capital varie dans le même rapport que le temps pendant lequel il est prêté.*

Cela étant, il est clair que les questions d'intérêts sont de véritables règles de trois susceptibles d'être immédiatement résolues à l'aide de la règle générale que nous avons donnée n° 319.

Toutes les questions d'intérêts simples se résolvent d'ailleurs à l'aide d'une formule générale que nous ferons connaître après avoir traité directement un ou deux problèmes.

325. Problème. *On demande la rente que produit un capital de* 18642$^{fr.}$ *placés à* 4 1/2 *pour* 100 *par an.*

La *rente* d'un capital est l'intérêt qu'il rapporte chaque année.

Notre problème peut donc se traduire ainsi :

100$^{fr.}$	rapportent	4$^{fr.}$ 50$^{cent.}$
18642$^{fr.}$		x

Raisonnement. 100$^{fr.}$ rapportant 4$^{fr.}$,50, 1$^{fr.}$ rapportera $\frac{4,50}{100}$;

18642$^{fr.}$ rapporteront $\frac{4,50 \times 18642}{100}$.

On obtient la *rente* d'un capital donné en multipliant ce capital par le taux, et divisant le produit par 100 (division qui se fait, comme on sait, en mettant ou déplaçant une virgule).

On peut appliquer la règle du n° 319.

L'intérêt varie dans le même rapport que le capital; on doit donc multiplier l'intérêt donné, 4$^{fr.}$,50, par le rapport des deux capitaux (de bas en haut) :

$$x = 4^{fr.},50 \times \frac{18642}{100} = \frac{4^{fr.},50 \times 18642}{100}.$$

326. Problème. *Trouver l'intérêt d'un capital de* 3246$^{fr.}$,24 *placé à* 5 *pour* 0/0 *par an pendant* 3 *ans* 8 *mois.*

On réduit le temps en mois (322); 3^{ans} 8^{mois} = 44^{mois}. Puis on traduit ainsi :

$100^{fr.}$	en 12^{mois}	rapportent	$5^{fr.}$
$3246^{fr.},24$	en 44^{mois}		x

Raisonnement. $1^{fr.}$ en 12^{mois} rapp. $\frac{5}{100}$

$1^{fr.}$ en 1^{mois} rapp. $\frac{5}{100 \times 12}$

$3246^{fr.},24$ en 1^{mois} rapp. $\frac{5 \times 3246{,}24}{100 \times 12}$

$3246^{fr.},24$ en 44^{mois} rapp. $\frac{5 \times 3246{,}24 \times 44}{100 \times 12}$

On peut appliquer la règle du n° 319 de cette manière.

L'intérêt varie dans le même rapport que le capital ; on doit multiplier par le rapport des deux capitaux (divisés de bas en haut); on a $5 \times \frac{3246{,}24}{100}$. L'intérêt varie dans le même rapport que le nombre des mois ; on devra multiplier par le rapport des nombres de mois (divisé de bas en haut) ; d'où

$$x = 5 \times \frac{3246{,}24}{100} \times \frac{44}{12} = \frac{5 \times 3246{,}24 \times 44}{100 \times 12}$$

Formule générale des intérêts simples.

327. Ainsi qu'on a déjà pu le voir, on rencontre dans une question d'intérêts quatre grandeurs distinctes : le *capital*, le *taux*, le *temps* du placement, et l'*intérêt du capital* pour ce temps.

L'une quelconque de ces quatre grandeurs peut être inconnue, les trois autres étant données. On peut donc avoir à résoudre quatre problèmes principaux distincts sur les intérêts simples, parmi lesquels est celui que nous venons de résoudre deux fois. Ces quatre problèmes se résolvent très-aisément à l'aide d'une seule et même formule que nous allons chercher.

Soient en général a un capital, i le taux, t le temps, et I l'intérêt de a au taux i pour le temps t.

Raisonnement.	$100^{fr.}$	en 1^{an}	rapp.	i
	$1^{fr.}$	en 1^{an}	rapp.	$\frac{i}{100}$
	$a^{fr.}$	en 1^{an}	rapp.	$\frac{a \times i}{100}$
	$a^{fr.}$	en $t^{années}$	rapp.	$\frac{a \times i \times t}{100}$.

Mais cet intérêt de $a^{fr.}$ pour $t^{années}$ est ce que nous avons appelé I; donc :

$$I = \frac{a \times i \times t}{100}. \qquad (1)$$

C'est la formule cherchée. Contenant les quatre quantités I, a, i, t, elle permet de calculer l'une quelconque de ces quatre quantités quand on connait les trois autres.

328. Avant de l'appliquer, remarquons que si i représente exclusivement l'intérêt de 100 fr. pour un an, t doit être le temps exprimé en années. Ainsi, si le temps était 5 mois, on prendrait $t = \frac{5}{12}$. (V. au n° 330 ce que l'on fait quand il y a des jours.)

Cette remarque faite, abordons les quatre problèmes dont notre formule donne les solutions.

329. 1er PROBLÈME. *Trouver l'intérêt d'un capital de* 1280 fr. *placé pendant* 2 *ans* 8 *mois, à* 5 *pour* 0/0 *par an.*

L'inconnue est I. On a d'ailleurs :

$$a = 1280; \quad i = 4\ 1/2 \text{ ou } 4{,}50; \quad t = 2 + \frac{8}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}.$$

Remplaçant dans la formule (1) les quantités a, i, t par leurs valeurs données, on obtient immédiatement

$$I = \frac{1280 \times 4{,}50 \times \frac{8}{3}}{100} = \frac{1280 \times 4{,}50 \times 8}{100 \times 3}.$$

2e PROBLÈME. *Quel est le capital qui, placé à* 5 *pour* 0/0 *par an, rapporterait* 684 *fr. d'intérêt en* 1 *an* 10 *mois.*

L'inconnue est le capital a ; on a d'ailleurs

$$i = 5\,; \qquad t = 1 + \frac{10}{12} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}\,; \qquad I = 684.$$

De la formule (1), en multipliant de part et d'autre par 100, on déduit $100 \times I = a \times i \times t$; d'où, en divisant par $i \times t$, on conclut :

$$\frac{100 \times I}{i \times t} = a. \qquad (2)$$

Remplaçant I, i, t, par leurs valeurs données, on trouve :

$$a = \frac{100 \times 684}{5 \times \frac{11}{6}} = \frac{100 \times 684 \times 6}{5 \times 11}.$$

3° Problème. *A quel taux faudrait-il placer un capital de* 3800 *pour en retirer* 190 *francs d'intérêts en* 2 *ans ?*

L'inconnue est i ; on a d'ailleurs $a = 3800$; $t = 2$ et $I = 190$. De la formule (1) on déduit $100.I = a \times i \times t = a \times t \times i$; d'où en divisant de part et d'autre par $a \times t$, on conclut :

$$\frac{100 \times I}{a \times t} = i\,(3).$$

Remplaçant I, a, t, par leurs valeurs données, on trouve :

$$i = \frac{100 \times 190}{3800 \times 2}.$$

4° Problème. *Au bout de combien de temps un capital de* 3800fr., *placé à* 5 *p.* 0/0, *aura-t-il rapporté* 190fr. *d'intérêt ?*

L'inconnue est t; on a d'ailleurs $a = 3800$; $i = 5$, $I = 190$.

De la formule (1), on déduit $100 \times I = a \times i \times t$; d'où, en divisant par $a \times i$, on conclut:

$$\frac{100 \times I}{a \times i} = t\,(4).$$

Remplaçant I, a, i, par les valeurs ci-dessus, on a :

$$t = \frac{100 \times 190}{3800 \times 5}.$$

Chacune des égalités (1), (2), (3), (4) est une formule pouvant servir spécialement à la résolution immédiate d'un des 4 problèmes principaux que nous venons de traiter ; mais il suffit d'en savoir une par cœur, les 3 autres s'en déduisant très-aisément ; c'est la formule (1) qu'on apprend de préférence, parce que le 1er problème est celui qui se présente le plus ordinairement.

Escompte commercial.

330. *On appelle* ESCOMPTE *la retenue qui est faite sur le montant d'une créance qui ne doit être payée qu'au bout d'un certain temps, et dont on veut être payé avant l'échéance.*

L'escompte, tel qu'on le fait dans le commerce, n'est autre chose que l'intérêt de la créance ou du billet escompté, calculé pour le temps qui doit s'écouler jusqu'à son échéance. Il n'y a que le mot de changé : on dit *escompte*, au lieu d'intérêt ; *taux d'escompte*, au lieu de taux d'intérêt.

Les questions relatives à l'escompte ne diffèrent donc aucunement des questions relatives aux intérêts simples. On les résout de la même manière, ou par le raisonnement, ou à l'aide de la formule $I = \frac{a \times i \times t}{100}$, dans laquelle i désignerait le taux d'escompte, et I l'escompte du billet considéré.

Ex. : Un billet de 3600fr., payable le 25 décembre 1853, est présenté à l'escompte le 12 mai de la même année ; le taux de l'escompte étant 4 p. 0/0, trouver le montant de la retenue, ou escompte.

On calcule d'abord le nombre de jours du 12 mai *inclusivement* jusqu'au 25 décembre *exclusivement.*

$$(20 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 24) = 227.$$

Dans le commerce ou la banque, on compte le nombre exact des jours, comme nous venons de le faire ; mais, pour simplifier le calcul, on regarde le jour comme $\frac{1}{360}$, et non comme $\frac{1}{365}$ d'année ; ainsi, dans la formule, nous prendrons $t = \frac{227}{360}$; $a = 3600$, $i = 4$.

D'où $I = \frac{3600 \times 4 \times 227}{100 \times 360}$.

On retrouve dans la question d'escompte les quatre quantités a, i, t, I ; on peut donc se proposer les 4 problèmes principaux que nous avons traités à propos de l'intérêt ; nous nous bornerons à celui que nous venons de traiter comme le plus usuel (*).

331. Remarque. La convention qui sert de base au calcul de l'escompte n'est pas équitable ; on retient, en effet, l'intérêt de la somme marquée sur le billet, et on ne paye, néanmoins, qu'une partie de cette somme.

332. Il serait plus juste que le banquier retînt seulement l'intérêt de la somme qu'il donne au porteur du billet, calculé pour le temps qui doit s'écouler jusqu'à son échéance.

On peut se demander ce qu'il donnerait en agissant ainsi pour le billet qui précède. Soit a cette somme ; I son intérêt sur 3600 fr., le banquier donne a et retient I ; donc $3600 = a + I$; mais d'après la formule (1), $I = \frac{a \times i \times t}{100}$; donc $3600 = a + \frac{a \times i \times t}{100}$. Multipliant des 2 parts par 100, on trouve $3600 \times 100 = 100\,a + a \times i \times t = a(100 + i \times t)$. De cette dernière égalité, on déduit $a = \frac{3600 \times 100}{100 + i \times t}$.

En remplaçant i par 4, et t par $\frac{227}{360}$, on aura la valeur de a dans notre exemple.

Si on désigne en général par A la valeur écrite sur le billet, ce qu'on appelle sa valeur nominale, en raisonnant comme précédemment sur 3600, on trouvera évidemment la formule générale :

$$a = \frac{100\,A}{100 + i \times t}.$$

Cette dernière manière de faire l'escompte est ce qu'on appelait faire l'escompte *en dedans*. L'escompte du commerce s'appelait escompte *en dehors*.

(*) Nous reviendrons plus tard sur les questions d'intérêts et d'escompte pour traiter la question des rentes sur l'État, celle des bordereaux d'intérêts et d'escompte, etc... exactement comme elles se traitent dans les maisons de commerce et de banque.

PARTAGES PROPORTIONNELS. — RÈGLES DE SOCIÉTÉ.

333. DÉFINITION. *On dit que des grandeurs* A, B, C, D, *sont proportionnelles à des nombres donnés*, 3, 4, 5, 7, par ex. : *quand le rapport de deux quelconques de ces grandeurs est égal à celui des deux nombres correspondants.* Ex. $A : B = 3 : 4$; $A : C = 3 : 5$; $B : D = 4 : 7$;

Ou, ce qui revient au même,

Quand on a l'égalité de rapports; $A : 3 = B : 4 = C : 5 = D : 7$ (*).

334. 1er PROBLÈME. *Partager une somme de* 1200fr. *en parties proportionnelles aux nombres* 5, 7, 8, 12.

Désignons par x, y, z, t les quatre parts cherchées. D'abord,

$$x + y + z + t = 1200.$$

et d'après l'énoncé : $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8} = \frac{t}{12}$.

Appliquant le principe du n° 305, nous aurons :

$$\frac{x+y+z+t}{5+7+8+12} \text{ ou } \frac{1200}{32} = \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8} = \frac{t}{12}$$

de $\frac{x}{5} = \frac{1200}{32}$ on déduit $x = \frac{1200 \times 5}{32}$

de $\frac{y}{7} = \frac{1200}{32}$ $\qquad y = \frac{1200 \times 7}{32}$

de $\frac{z}{8} = \frac{1200}{32}$ $\qquad z = \frac{1200 \times 8}{32}$

enfin de $\frac{t}{12} = \frac{1200}{32}$ $\qquad t = \frac{1200 \times 12}{32}$.

Les trois premières parts trouvées, on pourrait avoir la 4e, en retranchant de 1200 la somme des 3 premières ; mais il convient mieux de calculer la 4e part de la même manière que les autres ; les quatre valeurs ainsi trouvées, leur somme doit reproduire

(*) $A : B = 3 : 4$ signifie qu'une commune mesure contenue 3 fois dans A (le tiers de A), est contenue 5 fois dans B, est la cinquième partie de B; $A : 3 = B : 5$ (n° 306.). Les deux définitions ci-dessus sont donc équivalentes.

exactement la valeur à partager ; ce qui offre une vérification utile.

En examinant les diverses valeurs ci-dessus de x, y, z, t, on peut formuler cette règle générale :

Pour avoir chaque part, on multiplie la valeur à partager par le nombre auquel cette part doit être proportionnelle ; puis on divise le produit par la somme des nombres proportionnels aux parts.

335. Dans les partages proportionnels, on fera bien de diviser par *leur plus g. c. div.* les nombres auxquels les parties doivent être proportionnelles ; l'égalité des rapports ci-dessus indiqués n'est pas troublée, tous les dénominateurs de ces rapports étant simultanément divisés par le même nombre (304).

S'il y a des fractions parmi les nombres auxquels les parties cherchées doivent être proportionnels, on réduit tous ces nombres donnés, entiers ou fractionnaires, en fractions de mêmes dénominateurs, et on remplace les fractions ainsi obtenues par leurs numérateurs.

Ex. : Partager 1200fr. en parties proportionnelles aux nombres 2, $3 + 1/4$, $5 + 2/3$, $\frac{8}{9}$.

On réduit au même dénominateur, 36 ; ce qui donne :

$$\frac{72}{36},\ \frac{117}{36},\ \frac{204}{36},\ \frac{32}{36}.$$

Partager 1200fr. en parties proportionnelles à ces fractions, revient à partager cette somme en parties proportionnelles à 72, 117, 204, 32. Les dénominateurs des rapports égaux $x : \frac{72}{36}$, etc., étant simultanément multipliés par le dénominateur commun 36, les nouveaux rapports sont égaux (*).

336. PROBLÈME. *Il y a dans une fabrique* 10 *hommes, payés à raison de* 3fr.,40 *par jour;* 7 *femmes, payées* 1fr.,80 *par jour;* 5

(*) $a : b = \frac{72}{36} : \frac{117}{36}$; $\frac{1}{36}$ d'une certaine mesure commune est contenue 72 fois dans a (est la 72ième partie de a), et contenue 117 fois dans b, est la 117e partie de b ; donc $a : 72 = b : 117$ (no 306).

enfants, payés 1fr. 10. *On accorde, par extraordinaire, une gratification de* 1200fr. *laquelle doit être partagée proportionnellement aux salaires; calculer les parts individuelles.*

Désignons par x la part d'un homme; par y, celle d'une femme, et z celle d'un enfant. D'après l'énoncé:

$$12x + 7y + 5z = 1200, \text{ et } x : 3{,}40 = y : 180 = z : 1{,}10$$

on ne change pas un rapport en multipliant ses 2 termes par un même nombre; de l'égalité des rapports précédents résulte donc celle-ci:

$$12x : 3{,}4 \times 12 = 7y : 1{,}80 \times 7 = 5z : 1{,}10 \times 5.$$

Faisant la somme des numérateurs d'une part, et celle des dénominateurs de l'autre, on a, d'après le principe du nº 305:

$$12x + 7y + 5z : 3 \times 40 \times 12 + 1{,}80 \times 7 + 1{,}10 \times 5$$

ou $$1200 : 58{,}90 = 12x : 3{,}40 \times 12$$

ou plus simplement: $1200 : 58{,}90 = x : 3{,}40$, d'où

$$x = \frac{1200 \times 3{,}40}{58{,}90}$$

on a de même: $1200 : 58{,}90 = y : 1{,}80$; d'où la valeur de y;

puis $1200 : 58{,}90 = z : 1{,}10$; d'où z.

Nous donnerons aux exercices d'autres exemples de partages proportionnels. Les problèmes de ce genre composent une classe très-étendue.

Règles de société.

337. Voici deux principes fondamentaux sur lesquels se fonde la résolution des questions qui portent ce nom.

1º *Quand les mises sont inégales et les temps inégaux, les bénéfices ou les pertes sont proportionnels aux mises.*

2º *Lorsque les mises sont égales et les temps égaux, les bénéfices ou pertes sont proportionnels aux temps.*

De ces deux principes d'une justice évidente, on conclut comme conséquence ce troisième principe aussi important.

3° *Si les mises et les temps sont quelconques, les bénéfices sont proportionnels aux produits des mises par les temps.*

Voici comment on déduit ce principe des deux autres :

Soit une mise m faite pour un temps t, et soit b le bénéfice correspondant à cette mise ; soit une deuxième mise m' faite pour un temps t', et soit b' le bénéfice correspondant; il s'agit de trouver le rapport de b à b'. Pour cela, prenons pour terme de comparaison auxiliaire une mise m faite pour le temps t', et soit b'' le bénéfice correspondant. En comparant les bénéfices b et b'' des mises m, faites l'une pour le temps t et l'autre pour le temps t', on est conduit, d'après 2°, à cette égalité :

$$\frac{b}{b''}=\frac{t}{t'} \qquad (1)$$

Si on compare les bénéfices b'' et b' des mises m et m' faites toutes deux pour le même temps t, on est conduit, d'après 1°, à cette égalité :

$$\frac{b''}{b'}=\frac{m}{m'} \qquad (2)$$

Multiplions terme à terme les égalités (1) et (2), et supprimant le facteur b'', commun aux deux termes du premier rapport obtenu, on est conduit à cette égalité :

$$\frac{b}{b'}=\frac{m\times t}{m'\times t'},$$

laquelle démontre le troisième principe.

338. **Problème.** 3 *commerçants associés ont fait un bénéfice de* 18000 *fr. Le premier avait mis dans la société une somme de* 12800 *fr., le* 2°, 15400 *fr., le* 3°, 21800 *fr. On demande la part de chacun.*

Les bénéfices devant être proportionnels aux mises, on partagera 18000 en parties proportionnelles aux nombres 12800, 15400, 21800, ou, ce qui est la même chose, à 128, 154, 218, ou encore à 64, 77 et 109.

$$x : 64=y : 77=z : 109; \qquad \text{d'où}$$

$$x+y+z \text{ ou } 18000 : (64+77+109)=x : 64,=y : 77=z : 109.$$

On déduit facilement de là les parts x, y, z.

339. Problème. *Un négociant commence une entreprise avec une somme de 12000 fr.; 8 mois plus tard, un associé verse dans son entreprise une somme de 18600 fr.; 14 mois plus tard encore, un nouvel associé s'intéresse pour une somme de 30000 fr. L'entreprise, après avoir duré en tout 6 ans, a produit un bénéfice de 48,000 fr. Le 1er associé doit percevoir une prime de 6 pour 100 sur le bénéfice, pour rémunération de la gestion dont il est resté chargé.*

Nous commencerons par prélever les 6 pour 100 que l'on ajoutera plus tard à la part du 1er associé.

Cette prime se compose d'autant de fois 6 fr. qu'il y a de fois 100 dans 48000; elle est égale $\frac{48000}{100} \times 6 = 480 \times 6 = 2880.$

La somme à partager est donc réduite à $48000 - 2880 = 45120$ fr.

La mise du 1er négociant est restée dans la société 6 ans, ou 72 mois;

Celle du 2e associé y est restée $72^m - 8^m = 64$ mois;

Celle du 3e associé, 64 mois $- 15^m = 49$ mois.

Nous avons vu (3e principe) que les bénéfices devaient être proportionnels aux produits respectifs des mises par les temps correspondants. Il nous faut donc partager 45120 en parties proportionnelles aux produits 12000×72, 18600×64, 30000×49 que l'on effectuera. On simplifiera ces termes de comparaison comme il a été dit, et on achèvera en suivant la marche indiquée n° 335. On n'oubliera pas d'ajouter les 2880 fr. à la part du premier négociant.

CHAPITRE VI.

DES LOGARITHMES ET DE LEURS USAGES.

Notions préliminaires.

340. PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE. *On appelle progression par* DIFFÉRENCE *une suite de nombres tels que chacun surpasse celui qui le précède immédiatement ou en est surpassé, d'un nombre constant qu'on appelle* raison *de la progression.*

Une progression par différence s'écrit ainsi : ÷ 5. 7. 9. 13.... et se lit de cette manière : 5 est à 7 par différence, est à 9, est à 13, etc....

Une progression par différence est *croissante* quand ses termes vont en augmentant, *décroissante* quand ses termes vont en diminuant. Ex. : 1° ÷ 5. 7. 9. 11... ; 2° ÷ 37. 34. 31, etc. Nous ne considérerons dans ce qui va suivre que des progressions croissantes.

La raison d'une progression par différence, croissante, s'évalue, d'après la définition, en retranchant un terme quelconque du terme immédiatement suivant. Dans notre ex. : $7-5=2$; la raison est 2.

341. THÉORÈME. *Dans une progression par différence un terme de rang quelconque est égal au 1er terme, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

Il ne s'agit que d'une progression croissante dans laquelle chaque terme surpasse le précédent de la raison. Cela posé, si le 1er terme est un nombre a et la raison r, il résulte de la définition que le second terme est $a+r$; le 3e $(a+r)+r=a+2r$; le 4e $(a+2r)+r=a+3r$, et ainsi de suite ; la loi est évidente : *chaque terme est égal au premier terme augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.* Le $n^{ième}$ terme a pour valeur

$a + (n-1)r$. Dans l'exemple cité, le 8ᵉ terme $= 5+7$ fois $2 = 19$.

Une progression par différence est donc généralement composée comme il suit :

$$\div a.\ a+r.\ a+2r.\ a+3r.\ a+4r,\ \text{etc.}$$

Nous n'en dirons pas davantage sur les progressions par différence ; ce qui précède suffisant à ce que nous avons en vue en les mentionnant ici.

342. PROGRESSIONS PAR QUOTIENT. *On appelle progression par quotient une suite de nombres tels que chacun est égal à celui qui le précède, multiplié par un nombre constant qu'on appelle* RAISON *de la progression.*

Une progression par quotient s'écrit ainsi :

$$\div\!\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : \ldots$$

et s'énonce de cette manière : 3 est à 6 par quotient, est à 12, est à 24, etc... La raison d'une progression par quotient s'obtient en divisant un terme par le précédent dans l'exemple : la raison est 2.

343. THÉORÈME. *Un terme quelconque d'une progression par quotient est égal au premier terme multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent celui que l'on considère.*

En effet, soient a le 1ᵉʳ terme d'une progression par quotient et q la raison. Il résulte de la définition même que le 2ᵉ terme est $a \times q$, le 3ᵉ $(a \times q) \times q = a \times q^2$, le 4ᵉ terme $(a \times q^2) \times q = a \times q^3$, etc... ; la loi de formation de ces valeurs est évidente ; chaque terme est égal au premier multiplié par la raison élevée à une puissance dont l'exposant est le nombre des termes qui précèdent celui que l'on considère. En général, le $n^{ième}$ terme est égal à aq^{n-1}. Une progression par quotient est donc généralement composée comme il suit :

$$\div\!\div\ a : a \times q : a \times q^2 : a \times q^3 : a \times q^4 \ldots\ldots$$

344. La somme d'un certain nombre de termes d'une progression par quotient peut s'obtenir immédiatement à l'aide d'une formule très-simple que nous allons indiquer.

Soit en général $S = a + a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + \ldots + a \times q^{n-1}$. (1)

Multiplions les 2 membres de cette égalité par q; il vient :

$$S \times q = a.\, q + a\times q^2 + a\times q^3 + a\times q^4 + \ldots + a\times q^{n-1} + a\times q^n. \quad (2)$$

Retranchant ces 2 égalités l'une de l'autre, (1) de (2), membre à membre, et les seconds membres terme à terme, on trouve $S\times q - S = a\times q^n - a$, ou, ce qui revient au même, $S\times(q-1) = a.\,(q^n-1)$; d'où, en divisant de part et d'autre par $q-1$, on déduira enfin $S = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$.

Telle est la formule cherchée.

Si on l'applique à la progression $\div\!\!\div$ 3 : 6 : 14... pour trouver la somme des 10 premiers termes, on trouve :

$$S = \frac{3\times(2^{10}-1)}{2-1} = 3\times(1024-1) = 3071.$$

345. Logarithmes. *Étant données deux progressions dont les termes se correspondent, chacun à chacun, l'une* par quotient, *commençant par* 1, *l'autre* par différence, *commençant par* 0, *chaque terme de la progression par différence est appelé le* logarithme *du terme correspondant de la progression par quotient.*

L'ensemble des deux progressions est ce qu'on nomme *un système de logarithmes.* Ex. :

$\div\!\!\div$ 1:3:9:27:81:243:729:2187:6561:19683:59049
$\div$ 0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

Dans ce système, 6 est le logarithme de 27, 14 est le logarithme de 2187.

Nous nous servirons, ordinairement, de l'abréviation log., pour logarithme; ex. : log 2187, pour logarithme de 2187.

346. Dans les applications, on n'assigne de logarithmes qu'aux nombres plus grands que 1. *Les nombres moindres que 1 n'ont pas de logarithmes.* Cela revient à supposer la raison de la progression par quotient toujours plus grande que 1; c'est ce que l'on fait.

En général, si on désigne par q la raison de la progression par quotient, et par d la raison de la progression par différence, les deux progressions d'un système quelconque de logarithmes seront ainsi composées :

$$\div\!\!\div\ 1:q:q^2:q^3:q^4:q^5:q^6:q^7\ldots\ldots:q^n\ldots$$
$$\div\ 0.d.2d.3d.4d.6d.6d.7d\ldots\ldots nd\ldots$$

347. A l'inspection de ces deux progressions, on peut immédiatement faire les remarques suivantes :

1° *La progression par quotient continuée indéfiniment se compose de la série complète des puissances de la raison.*

2° *La progression par différence, continuée indéfiniment, se compose de la série complète des multiples de la raison.*

3° *L'exposant de la raison* q, *dans un terme de la progression par quotient, augmenté de* 1, *indique le rang de ce terme dans la progression; le multiplicateur ou* COEFFICIENT *de la raison* d, *dans un terme de la progression par différence, augmenté de* 1, *indique le rang de ce terme dans la progression.*

Il résulte de là que *si deux termes se correspondent dans les deux progressions, l'exposant de la raison dans le terme de la progression par quotient est précisément égal au multiplicateur ou coefficient de la raison dans le terme de la progression par différence.* La réciproque est vraie. *Si un exposant de* q *et un coefficient de* d *sont égaux, les termes considérés sont correspondants.* Cela résulte de 3°.

C'est de cette composition des deux progressions que résultent les propriétés des logarithmes dont nous aurons à faire usage.

Propriétés des logarithmes.

348. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE. *Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes de ses facteurs.*

C'est-à-dire, que si on multiplie entre eux plusieurs termes de la progression par quotient, d'une part, et si on additionne de l'autre les termes correspondants de la progression par différence, le produit et la somme sont deux termes correspondants des deux progressions, autrement dit, *la somme est le logarithme du produit.*

Considérons, par ex. : les termes q^2, q^5, q^8 de la progression par quotient; leurs logarithmes, c'est-à-dire les termes correspondants de la progression par différence sont respectivement $2d$, $5d$, $8d$; le produit $q^2 \times q^5 \times q^8 = q^{2+5+8}$; ce produit (56) fait partie de la progression par quotient (Remarque 1°) ; il y occupe le rang $(2+5+8)+1$, c'est-à-dire le 16ᵉ rang (Remarque 3°). La somme des logarithmes est $2d+5d+8d=(2+5+8)\times d$; c'est un terme de la progression par différence (Remarque 2°); elle y occupe le rang $(2+5+8)+1$, c'est-à-dire le 16ᵉ rang

(Remarque 3°). La somme et le produit sont donc deux termes correspondants des deux progressions ; la somme est le logarithme du produit; ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE. Cette démonstration est générale. Puisqu'on ne prend que des termes correspondants dans les deux progressions, les exposants que l'on additionne pour former l'exposant de q au produit sont égaux, un à un, aux *coefficients* que l'on additionne pour former le coefficient de d dans la somme. L'exposant de q dans le produit et le coefficient de d dans la somme ne peuvent donc manquer d'être égaux ; le produit et la somme sont nécessairement deux termes correspondants. Le produit a toujours pour logarithme la somme des logarithmes de ses facteurs.

349. 2e PROPRIÉTÉ. *Le logarithme d'un quotient s'obtient en retranchant le logarithme du diviseur du logarithme du dividende.*

Soient deux nombres a et b dont le quotient est c. Par définition du quotient, $a = b \times c$. D'après le théorème précédent, $\log a$ ou $\log (b \times c) = \log b + \log c$; on déduit de là, $\log c = \log a - \log b$. Ce qui démontre notre proposition.

350. 3e PROPRIÉTÉ. *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par l'exposant de la puissance.*

Par ex. : $$\log a^5 = 5 \log a.$$

En effet, $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$; $\text{Log } a^5 = \log a + \log a + \log a + \log a + \log a = 5 \log a$.

351. 4e PROPRIÉTÉ. *Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre divisé par l'indice de la racine.*

Par ex. : $\log \sqrt[3]{a} = \dfrac{\log a}{3}$.

En effet, par définition $(\sqrt[3]{a})^3 = a$; par suite $\log a = \log (\sqrt[3]{a})^3 = 3 \log \sqrt[3]{a}$, d'après le théorème précédent. On déduit de là $\log \sqrt[3]{a} = \dfrac{\log a}{3}$.

Ce qu'il fallait démontrer.

352. *Ces diverses propriétés des logarithmes donnent le moyen de remplacer une* MULTIPLICATION *par une* ADDITION, *une* DIVISION

par une SOUSTRACTION ; *l'élévation à une* PUISSANCE *par une* MULTIPLICATION, *et une* EXTRACTION DE RACINE *quelconque par une simple* DIVISION.

Considérons, en effet, les deux progressions déjà prises pour exemple :

$$\div\div 1:3:9:27:81:243:729:2187:6561:19683:59049$$
$$\div\ 0.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ 18.\ 20$$

Proposons-nous de trouver le produit des nombres 3, 9, 81, compris dans la progression par quotient. Nous additionnerons log 3 = 2, log 9 = 4, log 81 = 8, la somme 14 de ces logarithmes est le logarithme du produit (348). Or, en cherchant 14 parmi les logarithmes, c'est-à-dire dans la progression par différence, on trouve qu'il correspond à 2187 de la progression par quotient. On en conclut que le produit demandé $3\times9\times81 = 2187$.

Pour avoir le cube d'un nombre donné, de 27 par ex. : nous prenons le log de 27 qui est 6, et nous le multiplions par l'exposant 3 de la puissance à former. Le résultat de cette multiplication étant 18, nous cherchons 18 parmi les logarithmes, c'est-à-dire dans la progression par différence, et nous voyons ainsi que 18 correspond au nombre 19683 de la progression par quotient; nous concluons de là que 19683 est le cube cherché de 27.

On applique de même les autres théorèmes.

353. DES TABLES DE LOGARITHMES. Pour tirer parti de ces propriétés des logarithmes, ayant adopté un système particulier de logarithmes, on a construit ce qu'on appelle des *Tables de logarithmes*.

Les *Tables de logarithmes* renferment la série des nombres entiers depuis 1 jusqu'à une limite déterminée; les plus usitées, celles de CALLET, contiennent les nombres entiers de 1 à 108000; à côté de chaque nombre, et sur la même ligne horizontale que lui, on trouve son logarithme évalué à moins d'une unité du 7ᵉ ordre décimal.

Nous allons faire connaître les principales propriétés du système de logarithmes que l'on a choisi, et apprendre à faire usage des tables susdites.

354. Le système des logarithmes vulgaires, dits logarithmes de Briggs, est celui dans lequel la *base* 10 de notre système de nu-

mération a pour logarithme 1. C'est pourquoi on appelle aussi 10 la *base* de ce système de logarithmes, le seul dont nous nous occuperons désormais. Tout ce qui suit se rapporte exclusivement à ce système.

Propriétés des logarithmes vulgaires.

355. *Le logarithme d'une puissance quelconque de 10 est égal à l'exposant même de cette puissance, ou bien, se compose d'autant d'unités qu'il y a de zéros après 1 dans cette puissance écrite en chiffres.*

En effet, par ex. : $\log 10^4 = 4 \log 10 = 1 \times 4 = 4$ (350).

Tous les logarithmes qui ne sont pas entiers sont, ainsi que nous l'avons déjà dit, évalués en décimales, à moins d'une unité décimale du 7ᵉ ordre, par défaut ou par excès.

356. *La partie entière du logarithme d'un nombre s'appelle la* CARACTÉRISTIQUE *de ce logarithme.*

Ex. : Log . 1395 = 3,1445742. La caractéristique de ce logarithme est 3.

357. THÉORÈME. *La* CARACTÉRISTIQUE *du logarithme d'un nombre quelconque se compose d'autant d'unités, moins une, qu'il y a de chiffres dans la partie entière d'un nombre.*

(La partie entière d'un nombre quelconque est le plus grand nombre entier qu'il contient.)

En effet, supposons que la partie entière d'un nombre donné N ait 3 chiffres ; ex : 537, 842. Ce nombre N est compris entre 100 et 1000 ; son logarithme est compris entre log 100 et log 1000 c'est-à-dire entre 2 et 3 ; ce logarithme se compose de 2, et d'une partie décimale ; la caractéristique est 2.

La caractéristique du logarithme d'un nombre se connaît donc à la seule inspection de la partie entière du logarithme de ce nombre ; aussi dans les tables de Callet, par exemple, pour gagner de la place on s'est dispensé d'écrire les caractéristiques.

358. THÉORÈME. *Connaissant le logarithme d'un nombre dans le système vulgaire, on obtient le logarithme du produit ou du quotient de ce nombre par une puissance de 10, en augmentant ou en diminuant tout simplement la caractéristique du logarithme donné*

d'autant d'unités qu'il y a de zéros après 1 dans cette puissance de 10 écrite en chiffres.

$$\text{Log}(A \times 10^n) = \log A + \log 10^n = \log A + n.$$

$$\text{Log}.\left(\frac{A}{10^n}\right) = \log A - \log 10^n = \log A - n.$$

ou sur un ex. :

$$\log(1395 \times 100) = \log(1395) + \log 100 = 3{,}1445742 + 2 = \\ = 5{,}1445742.$$

$$\log(1395 : 100) = \log 1395 - \log 100 = 3{,}1445742 - 2 = \\ = 1{,}1445742.$$

L'exposant, n, de 10 étant un nombre entier, l'addition ou la soustraction ci-dessus ne porte que sur la caractéristique.

Le théorème précédent s'énonce assez souvent, comme il suit, par abréviation.

On multiplie ou on divise un nombre quelconque par une puissance de 10, en augmentant ou diminuant la caractéristique de son logarithme de l'exposant de 10, ou bien d'autant d'unités qu'il y a de zéros après 1 dans cette puissance de 10 écrite en chiffres.

Cet énoncé doit être regardé comme équivalent au précédent.

359. COROLLAIRES. *Le logarithme du nombre décimal que l'on obtient en séparant par une virgule un ou plusieurs chiffres sur la droite d'un nombre entier, a la même partie décimale que le logarithme de ce nombre entier.*

Ex. : $\log 36748 = \log 367{,}48 + 2.$

Si deux nombres ne diffèrent que par la place de la virgule décimale, les logarithmes de ces nombres ne diffèrent que par la caractéristique.

$$\text{Log } 3674{,}8 = \log 36{,}748 + 2.$$

Nous allons maintenant expliquer l'usage des tables. Nous donnerons ensuite quelques applications.

Disposition et usage des tables de logarithmes de Callet.

360. 1° *Un nombre quelconque étant donné, trouver son logarithme;* 2° *Connaissant le logarithme d'un nombre, trouver ce nombre.*

Tels sont les deux problèmes que les tables de logarithmes servent à résoudre et dont nous allons développer la solution.

361. Nous commencerons par résoudre le premier problème pour *les nombres entiers*. (On n'a jamais, en définitive, qu'à chercher des logarithmes de nombres entiers.)

1[er] CAS. *Le nombre donné est inférieur à* 1200.

Ex. : Trouver le logarithme de 837.

On écrit d'abord la caractéristique 2 immédiatement connue d'après ce que nous avons dit n° 357; on la fait suivre d'une virgule décimale, puis on ouvre la table de logarithmes tout à fait au commencement, de la 2e page à la 5e, CHILIADE I (*premier mille*). Les nombres naturels de 1 à 1200 sont inscrits dans ces pages, par ordre de grandeurs, dans des colonnes verticales au haut de chacune desquelles on remarque la lettre N, initiale du mot *nombre*. On cherche le nombre 837 dans une de ces colonnes marquées N; l'ayant trouvé, on voit à côté de lui, immédiatement à sa droite, sur la même ligne horizontale, un nombre de 8 chiffres 92272546; c'est la partie décimale du logarithme de 837; on écrit cette partie décimale à droite de la caractéristique 2, et on a ainsi $\log\ 837 = 2{,}92272546$.

Au delà de la 5e page, pour les nombres supérieurs à 1200, la disposition des tables n'est plus aussi simple; au lieu de décrire plus ou moins longuement cette disposition, nous aimons mieux prendre au hasard une des pages qui suivent la première chiliade et la transcrire exactement ici (*). Nous servant de cette page spécimen comme on se sert d'une figure en géométrie, nous achèverons de développer la solution de notre double problème, *trouver le logarithme d'un nombre entier quelconque, et réciproquement.*

(*) Il faudrait ajouter : *en laissant de côté ce qui est inutile pour la solution de notre double problème;* car nous avons supprimé dans la page de Callet deux colonnes verticales à gauche et une horizontale tout en haut dans le cadre

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	diff.
2160	334.4538	4739	4940	5141	5342	5543	5744	5945	6146	6347	
61	6548	6749	6950	7151	7351	7552	7753	7954	8155	8356	201
62	8557	8758	8959	9159	9360	9561	9762	9963			1 | 20
	335.								0164	0364	2 | 40
63	0565	0766	0967	1168	1368	1569	1770	1970	2171	2372	3 | 60
64	2573	2773	2974	3175	3375	3576	3777	3977	4178	4378	4 | 80
2165	4579	4780	4980	5181	5381	5582	5782	5983	6183	6384	5 | 101
66	6585	6785	6986	7186	7386	7587	7787	7988	8188	8389	6 | 121
67	8589	8790	8990	9190	9391	9591	9791	9992			7 | 141
	336.								0192	0392	8 | 161
68	0593	0793	0993	1194	1394	1594	1795	1995	2195	2395	9 | 181
69	2596	2796	2996	3196	3396	3597	3797	3997	4197	4397	
2170	4597	4797	4998	5198	5398	5598	5798	5998	6198	6398	
71	6598	6798	6998	7198	7398	7598	7798	7998	8198	8398	200
72	8598	8798	8998	9198	9398	9598	9798	9998			
	337.								0198	0397	1 | 20
73	0597	0797	0997	1197	1397	1596	1796	1996	2196	2396	2 | 40
74	2595	2795	2995	3195	3394	3594	3794	3994	4193	4393	3 | 60
2175	4593	4792	4992	5192	5391	5591	5791	5990	6190	6389	4 | 80
76	6589	6788	6988	7188	7387	7587	7786	7986	8185	8385	5 | 100
77	8584	8784	8983	9183	9382	9582	9781	9981			6 | 120
	338.								0180	0379	7 | 140
78	0579	0778	0978	1177	1376	1576	1775	1974	2174	2378	8 | 160
79	2572	2772	2971	3170	3369	3569	3768	3967	4166	4366	9 | 180
2180	4565	4764	4963	5163	5362	5561	5760	5959	6158	6358	
81	6557	6756	6955	7154	7353	7552	7751	7950	8149	8348	
82	8547	8746	8946	9145	9344	9543	9742	9940			199
	339.								0139	0338	
83	0537	0736	0935	1134	1333	1532	1731	1930	2129	2327	1 | 20
84	2526	2725	2924	3123	3322	3520	3719	3918	4117	4316	2 | 40
2185	4514	4713	4912	5111	5309	5508	5707	5906	6104	6303	3 | 60
86	6502	6700	6899	7098	7296	7495	7693	7892	8091	8289	4 | 80
87	8488	8686	8885	9084	9282	9481	9679	9878			5 | 100
	340.								0076	0275	6 | 119
88	0473	0672	0870	1069	1267	1466	1664	1862	2061	2259	7 | 139
89	2458	2656	2854	3053	3251	3449	3648	3846	4045	4243	8 | 159
2190	4441	4639	4838	5036	5234	5433	5631	5829	6027	6226	9 | 179
91	6424	6622	6820	7018	7217	7415	7613	7811	8009	8207	
92	8405	8604	8802	9000	9198	9396	9594	9792	9990		
	341.									0188	198
93	0386	0584	0782	0980	1178	1376	1574	1772	1970	2168	
94	2366	2564	2762	2960	3158	3356	3554	3752	3950	4147	1 | 20
2195	4345	4543	4741	4939	5137	5334	5532	5730	5928	6126	2 | 40
96	6323	6521	6719	6917	7114	7312	7510	7708	7905	8103	3 | 59
97	8301	8498	8696	8894	9091	9289	9486	9684	9882		4 | 79
	342.									0079	5 | 99
98	0277	0474	0672	0870	1067	1265	1462	1660	1857	2055	6 | 119
99	2252	2450	2647	2845	3042	3240	3437	3635	3832	4029	7 | 139
2200	4227	4424	4622	4819	5016	5214	5411	5608	5806	6003	8 | 158
01	6200	6398	6595	6792	6990	7187	7384	7581	7779	7976	9 | 178
02	8173	8370	8568	8765	8962	9159	9356	9554	9751	9948	
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Au haut de chacune des pages de la table qui suivent la 1[re] CHILIADE, en dehors de l'encadrement, on remarque deux nombres de trois chiffres, le premier précédé de la lettre N (initiale du mot *nombre*), le second de la lettre L (initiale du mot *logarithme*). Les chiffres du premier nombre (Ex : N. 216), sont les 3 premiers chiffres à gauche du 1[er] nombre inscrit dans la table, dans la colonne verticale de droite, au haut et au bas de laquelle on lit aussi la lettre N. Dans l'encadrement en haut et en bas, à droite de la lettre N dont nous venons de parler, sur une même ligne horizontale, on trouve écrit en chiffres un peu plus gros :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

formant chacun le commencement ou la fin d'une colonne verticale.

Cela exposé, revenons à notre question principale.

2[e] CAS. *Le nombre donné plus grand que* 1200 *a quatre chiffres.* Ex. : Trouver log. 2187.

On écrit d'abord la caractéristique 3, suivie d'une virgule décimale. Cela fait, on cherche en haut de la table en dehors de l'encadrement, à droite de la lettre N, le nombre que forment les 3 premiers chiffres à gauche du nombre proposé ; 218, dans notre exemple ; on s'arrête quand on a trouvé ce nombre de 3 chiffres, ou, à défaut parmi ces nombres ainsi précédés de N, celui qui en approche le plus *en moins* ; dans notre exemple, on s'arrête ainsi à la page en tête de laquelle il y a N. 216 ; on cherche le nombre donné 2187 dans cette page (*). Pour cela, on parcourt la colonne verticale intitulée N (en haut et en bas), lisant les 3 premiers chiffres 216, 217 des nombres qu'elle renferme jusqu'à ceux du nombre proposé, c'est-à-dire jusqu'à 218.

Arrivé là, nous lisons 2180, 2181... jusqu'à 2187 (**). A droite de 2187, on trouve dans la colonne marquée 0, en haut ou en bas (***), des nombres de 3 chiffres détachés ou isolés ; on prend

(*) Si on avait trouvé exactement les 3 premiers chiffres 218 en haut, on eût commencé à chercher dans la page précédente, là où se serait trouvé 218, isolé dans la colonne intitulée 0.

(**) Suivant que le 4[e] chiffre est inférieur à 5, ou au moins 5, on peut prendre le 1[er] 218 ou le 2[e] (2180 ou 2185), pour commencer à lire ainsi.

(***) Dans la suite de ces explications, au lieu de dire marquée N, en haut et

celui qui est, ou immédiatement à droite du nombre proposé, ou le plus voisin au dessus; dans notre exemple, c'est 339; ce sont les 3 premiers chiffres décimaux du logarithme cherché; on les écrit à droite de la caractéristique, ce qui donne 3, 339. Puis on prend dans la même colonne intitulée 0 le nombre de 4 chiffres placé à droite du nombre proposé sur une même ligne horizontale; à côté de 2187 on lit ainsi 8488; ce sont les quatre décimales suivantes du logarithme cherché; on les écrit à la suite des 3 premières, et on a ainsi :

Log. 2187 = 3, 3398488; à moins de 0,0000001.

3e Cas. *Le nombre donné a 5 chiffres.*

Ex. : Trouver le logarithme de 21748.

On écrit d'abord la caractéristique, 4, suivie d'une virgule décimale; on cherche ensuite au haut de la table, en dehors de l'encadrement, les 3 premiers chiffres à gauche du nombre proposé, ou le dernier nombre de 3 chiffres inférieur, comme il a été expliqué au 2e cas. Nous nous arrêtons ainsi à 216; nous cherchons dans la page que ce nombre nous indique, et dans la colonne verticale intitulée N les quatre premiers chiffres à gauche du nombre proposé, dans notre exemple 2174. On prend alors à droite, dans la colonne intitulée 0, le nombre de 3 chiffres isolé, placé à droite du proposé, ou le plus voisin au-dessus; dans notre exemple, c'est 337; on écrit ces 3 chiffres à droite de la caractéristique, 4, déjà écrite; ce qui donne 4, 337. Pour compléter ce logarithme à 7 chiffres décimaux, on suit de gauche à droite la colonne horizontale de nombres de 4 chiffres, qui suit le nombre de 4 chiffres considéré, 2174, jusqu'à ce qu'on arrive à la colonne verticale ayant en tête le 5e chiffre de ce nombre donné, 8, dans notre exemple); on prend les 4 chiffres qui se trouvent à la rencontre des 2 colonnes, horizontale et verticale; dans notre exemple, 4193; ce sont les 4 décimales suivantes du logarithme cherché; on les écrit à la droite des 3 premières, et on a enfin :

Log. 21748 = 4,3374193, à moins de 0,0000001.

---

en bas, marquée 0 en haut et en bas, etc., nous dirons plus simplement, dans la colonne intitulée N, ou intitulée 0, ou intitulée 1, etc.

CAS PARTICULIER. Il peut arriver qu'ayant déjà écrit les 3 premières décimales du logarithme, conformément aux explications précédentes, et cherchant les 4 suivantes, on trouve *du blanc* à l'intersection de la ligne horizontale suivie, et de la ligne verticale portant en tête comme *titre* le 5e chiffre du nombre donné.

Ex. : Trouver log. 21879. Ayant déjà écrit 4, 339, quand on cherche les 4 chiffres décimaux suivants, on trouve *du blanc* dans la colonne intitulée 9; c'est que les 3 chiffres détachés, 339 trouvés dans la colonne, 0, les plus voisins au-dessus du nombre de 4 chiffres, 2187, qui commence le nombre donné 21879, ont cessé de convenir pour commencer la partie décimale du logarithme cherché; il faut prendre alors dans la colonne intitulée, 0, les 3 chiffres détachés immédiatement inférieurs, 340, et on écrira 4, 340 au lieu de 4, 339; puis on suivra la colonne horizontale qui commence par 340, suivi d'un ou de plusieurs blancs, jusqu'à ce qu'on arrive à la colonne verticale ayant en tête le 5e chiffre du nombre proposé, 9 dans notre exemple; on prend les 4 chiffres qui se trouvent là dans la colonne horizontale suivie; dans notre exemple, 0275, et on les écrit à la droite des 3 premiers corrigés; on a ainsi :

$$\text{Log. } 21879 = 4.3400275.$$

4e CAS. *Le nombre cherché a 6 chiffres.*

Ex. : Trouver log 219748.

On écrit d'abord la caractéristique 5 suivie d'une virgule décimale. Cela fait, ouvrant la table, on cherche, en suivant exactement, la marche que nous venons d'indiquer pour le 3e CAS, le logarithme du nombre formé par les 5 premiers chiffres à gauche du nombre proposé; dans notre ex., 21974; on écrit les 7 décimales de ce logarithme 3419091, trouvées en deux fois à la droite de la caractéristique, 5, déjà écrite; on a ainsi, avec une grossière approximation, log 219748 = 5,3419091; pour l'avoir plus exactement, on continue comme il suit : on jette les yeux sur la dernière colonne verticale de la page de logarithmes; dans cette colonne, intitulée *diff.* (lisez différences), on trouve de petites tables, dites *tables de différences proportionnelles*; ces petites tables sont composées chacune, à gauche, des nombres 1, 2, 3,... 9, et

à droite, de dix nombres plus ou moins grands, qui sont les différences proportionnelles susdites; en tête de chacune de ces tables, au dessus du filet, il y a un nombre isolé; ce nombre isolé est la différence qui existe entre deux logarithmes consécutifs (se suivant sur une même ligne horizontale), dans une certaine partie de la page de logarithmes actuellement considérée. On cherche le 6ᵉ chiffre du nombre proposé dans la colonne de gauche de l'une de ces petites tables; pour savoir dans laquelle on doit chercher, on retranche simplement le dernier chiffre du logarithme déjà écrit, 5,34111748, du dernier des 4 quatre chiffres qui le suivent horizontalement tout de suite à droite, 9289; 1 ôté de 9, reste 8; on prend la petite table la plus voisine de la page où l'on est, ayant en tête un nombre terminé par un 8 (*); c'est 198. Dans la 1ʳᵉ colonne, à droite, de cette petite table, ainsi que nous l'avons dit, on cherche le 6ᵉ chiffre du nombre donné, dans notre exemple 8; on prend le nombre écrit à droite du 8 qui est 158; ce sont 158 unités décimales du 7ᵉ ordre qui doivent compléter le logarithme cherché; on les écrit sous les derniers chiffres à droite du logarithme approché, 5,3419091; on fait l'addition

$$\begin{array}{r} 5{,}3419091 \\ 158 \\ \hline \end{array}$$

et on a enfin $\log 219748 = 5{,}3419249.$

5ᵉ CAS. *Le nombre donné a 7 chiffres.*

Ex. : Trouver $\log 2175386.$

Voici le calcul que nous expliquerons :

$$\begin{array}{r} 6{,}3375192 \\ 159 \\ 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\log 2175386 = 6{,}3375363.$$

Ayant écrit la caractéristique 6, suivie d'une virgule décimale, on cherche le log. du nombre que forment les 5 premiers à gauche

(*) A moins qu'on ne soit assez bas ou assez haut dans la table pour que le nombre terminé par le chiffre restant soit à la page suivante ou précédente.

21753, suivant la méthode indiquée (3e cas). On écrit les 7 décimales successivement trouvées de ce logarithme à droite de la caractéristique (6,). Cela fait, on détermine à l'aide de la table des différences le nombre des unités du 7e ordre décimal qui doivent compléter log. 2175386; on y cherche le 6e chiffre 8, d'après la marche indiquée (4e cas); on trouve, à côté 159, que l'on écrit sous le logarithme approché, dans notre ex. : 6,3375192; puis on cherche le 7e chiffre 6 dans la 1re colonne de la même petite table des différences : on lit à côté 119; on écrit 119 sous les 3 chiffres précédents, 159, mais en avançant le dernier chiffre, à droite, d'un rang vers la droite comme il est indiqué. Cela fait, on additionne les 3 nombres écrits; seulement, on ne considère le dernier chiffre du 3e nombre que pour augmenter d'une unité la colonne à gauche, dans le cas seulement où ce dernier chiffre serait 5 ou plus grand que 5; c'est ce qui arrive dans notre exemple.

6e Cas. *Le nombre donné a 8 chiffres*. Ex. : log 21753864.

```
                 7,3375192
                       159
                        119
                         80
                 ─────────
Log 21753864 = 7,3375371.
```

On écrit la caractéristique 7, suivie d'une virgule décimale; cela fait, on opère d'abord comme si le nombre n'avait que ses 7 premiers chiffres à gauche (méthode du 5e cas); mais avant de faire l'addition indiquée, on cherche dans la petite table des différences proportionnelles, déjà considérée deux fois, le dernier chiffre du nombre proposé; dans notre ex. : on trouve à côté 80; on écrit 80 sous les nombres déjà écrits, en avançant seulement son dernier chiffre à droite d'un rang vers la droite, comme il est indiqué. Cela fait, on additionne; on n'écrit les chiffres de la somme qu'à partir du 7e décimal; les chiffres à droite ne comptant que pour la retenue et pour l'augmentation d'une unité du 7e chiffre dans le cas où le 1er des chiffres négligés à droite de la somme serait au moins 5.

Si le nombre proposé avait plus de 8 chiffres, on continuerait d'une manière analogue; seulement, sauf pour la caractéristique,

il est évident qu'on ne devra plus tenir compte des chiffres de droite, pour lesquels il faudrait écrire des différences proportionnelles qui n'influeraient plus sur la 7e décimale du résultat final.

Notre tâche est achevée pour les nombres entiers.

362. NOMBRES DÉCIMAUX. Ex. : Trouver log 219,748.

RÈGLE. *Faisant abstraction de la virgule, on cherche le log. du nombre entier résultant; ce logarithme trouvé, on remplace sa caractéristique par celle qui convient au nombre décimal donné.*

En opérant comme il a été indiqué (4e CAS), on trouve

$$\log 219748 = 5{,}3419249\,;$$

on en conclut $\log 219{,}748 = 2{,}3419249$, d'après le n° 358.

Il ne s'agit dans la règle précédente que des nombres décimaux plus grands que 1, puisque nous n'attribuons pas de logarithmes aux nombres moindres que 1.

NOMBRES FRACTIONNAIRES. On joint l'entier à la fraction quand il y a lieu ; cela fait, on cherche le logarithme du numérateur, celui du dénominateur ; on retranche le dernier du premier ; le reste est le logarithme du nombre fractionnaire donné.

Ex. : Trouver $\log\left(101 + \dfrac{173}{2174}\right)$.

$$101 + \frac{173}{2174} = \frac{219747}{2174}.$$

(4e cas) $\log 219747 = 5{,}3419091$

(2e cas) $\log \quad 2174 = 3{,}3372595$

$$\log.\ \frac{219747}{2174} = 2{,}0046496.$$

Fractions ordinaires ou décimales moindres que 1. Ces nombres n'ayant pas de logarithmes, il n'y a pas lieu de nous en occuper ici ; dans les applications des logarithmes dont nous allons nous occuper, nous indiquerons ce que l'on fait quand on rencontre de pareils nombres.

363 PROBLÈME II. *Connaissant le logarithme d'un nombre, trouver ce nombre.*

Nous supposons que le logarithme donné n'ait que 7 décimales ;

s'il en avait davantage, on devrait supprimer toutes celles qui suivent la septième. En outre, comme la caractéristique du logarithme donné ne doit servir qu'à indiquer l'ordre des plus hautes unités, on en fera d'abord abstraction, et on n'aura égard qu'à la partie décimale de ce logarithme, ainsi qu'il va être indiqué.

Soit par ex. : log N = 2,3395969.

Log N = 2,3395969	
5906	2185732
63	N = 218,5732
59	
40	

On cherche au haut de la table, en dehors de l'encadrement, parmi les nombres précédés d'une L, le nombre que forment les 3 premiers chiffres décimaux du logarithme donné, dans notre exemple 339. On s'arrête, ou à ce nombre de 3 chiffres trouvé exactement parmi ces nombres précédés de L, ou bien à celui de ces nombres qui en approche le plus, *en moins*.

Dans notre exemple, on s'arrête ainsi à la page, au haut de laquelle on trouve, hors du cadre, L. 334. (V. la page spécimen, p. 263) (*). On parcourt dans cette page la colonne intitulée 0, y regardant seulement sur la gauche les nombres isolés ou détachés de 3 chiffres, jusqu'à ce que l'on ait trouvé celui qui commence la partie décimale du logarithme donné, c'est-à-dire 339; ayant trouvé ces 3 premiers chiffres, on cherche toujours dans la colonne intitulé 0, parmi les nombres de 4 chiffres, qui y sont situés entre 339 et 440, les quatre derniers chiffres décimaux 5969 du logarithme donné; n'y trouvant pas ces 4 chiffres exactement, on y prend le nombre qui approche le plus, *en moins* de 5969; c'est 4514; on écrit alors, à part, le nombre de 4 chiffres qui se trouve à gauche de 4514, dans la colonne intitulée N, c'est-à-dire, 2185. Puis partant de 4514, on parcourt de gauche à droite la colonne horizontale dont ce nombre fait partie; on y cherche les 4 dernières décimales 5969; ne les y trouvant pas exactement, on s'arrête à celui de ces nombres de

(*) Ou bien à la fin de la page précédente.

4 chiffres qui approche le plus, *en moins* de 5969; c'est 5906; on écrit 5906 sous 5969 du logarithme donné, et en même temps on fait suivre 2185 du chiffre écrit au haut de la colonne verticale, dans laquelle on a trouvé ce nombre 5906 inférieur à 5969; on forme ainsi 21857; cela fait, on soustrait 5906, écrit comme il a été indiqué, du logarithme donné; on trouve le reste 63; on cherche 63 dans la colonne de droite de la petite table voisine de différences proportionnelles (celle qui a en tête 198). (V. le 4e cas du précédent problème) (*). Ne l'y trouvant pas exactement, on voit le nombre de cette colonne qui en approche le plus, *en moins*; c'est 59. On prend le chiffre 3 écrit à droite de 59 dans cette petite table, et on l'écrit à droite du nombre de 5 chiffres, 21857, déjà trouvé; ce qui donne 218573; si on tient à calculer un chiffre de plus, on retranche 59 de 63; le reste est 4; on fait suivre 4 d'un zéro; d'où 40. On cherche 40 dans la même petite table à droite; l'y trouvant exactement, on prend le chiffre 2 à gauche de 40 pour l'écrire à droite de 218573; on a ainsi 2185732. (On ne doit pas continuer l'usage de la petite table au delà de ce 7e chiffre.) On termine le calcul en ayant égard à la caractéristique 2 du log. donné; d'après cette caractéristique, le nombre cherché devant avoir 3 chiffres à gauche de la virgule décimale, nous plaçons une virgule après le troisième chiffre, de gauche à droite; d'où enfin $N = 218{,}5732$, à moins d'une unité de l'ordre de son septième chiffre (357).

Si la caractéristique avait surpassé 6, on aurait ajouté à droite de 2185732 assez de zéros pour que le nombre résultant eût autant de chiffres plus un qu'il y a d'unités dans la caractéristique.

Est-il nécessaire d'ajouter que si on trouvait les 4 dernières décimales dans la colonne intitulée 0, le problème se trouverait résolu; le nombre situé dans la colonne intitulée N, à gauche de ces 4 chiffres, serait le nombre demandé, sauf toujours à avoir égard à la caractéristique donnée, comme il a été indiqué plus haut. Ex. : Log. $x = 0,3386557$. En suivant la marche indiquée, on

(*) Quand la différence écrite en tête de la petite table, Ex. : 198, est inférieure à 100, ou voisine de 100, en plus, il ne faut même pas aller au delà du 6e chiffre; on s'arrête après avoir trouvé le 6e chiffre à l'aide de la petite table.

A l'aide des logarithmes, on ne peut déterminer exactement que les 6 ou 7 premiers chiffres d'un nombre, *à partir du 1er significatif à gauche.*

trouve les 4 dernières décimales 6557, exactement dans la colonne 0; à gauche de 6557, on trouve 2181; la caractéristique étant 0, on place une virgule après le 1er chiffre de gauche, et on a $x =$ 2,181.

Il en serait de même si les 4 derniers chiffres se trouvaient exactement dans l'une des colonnes horizontales; le problème serait résolu quand on aurait écrit comme 5e chiffre de gauche, à droite, du nombre cherché celui qui est en tête de la colonne verticale où on a trouvé exactement ces 4 dernières décimales; sauf toujours à avoir égard à la caractéristique. Ex. : Log. $x = 1,3375591$. En suivant la marche indiquée, ayant déjà écrit 2175 pour les 4 premiers chiffres de gauche à droite du nombre cherché, on trouve exactement les 4 dernières décimales 5591 dans la colonne horizontale que l'on parcourt, à la rencontre de cette colonne horizontale avec la colonne verticale intitulée 5; on ajoute 5 à droite de 2175; ce qui donne 21755; il ne reste plus qu'à avoir égard à la caractéristique, 1; $x = 21,755$.

Cas particulier. Il peut arriver que le 1er nombre de 4 chiffres trouvé au-dessous des 3 premières décimales du logarithme donné, surpasse le nombre que forment les 4 dernières décimales de ce logarithme. Ex. : Log. $x = 1,3380287$. Dans ce cas, il faut chercher dans la colonne horizontale incomplète qui commence par les 3 premières décimales 338, du logarithme; c'est dans cette colonne qu'on trouvera les 4 derniers chiffres, 0287, ou le nombre de 4 chiffres qui en approche le plus, *en moins*; c'est 0180; on prend le nombre de 4 chiffres à gauche de 338, et immédiatement au-dessus c'est; 2177; on le fait suivre du chiffre 8 qui est en tête de la colonne où on a pris le nombre approché, 0180; ce qui donne 21778; ayant placé 0180 sous les 4 derniers chiffres du logarithme donné 1,3380287, on fait la soustraction, puis on fait usage du reste comme il a été indiqué dans le cas général pour trouver un 6e, et si on veut un 7e chiffre du nombre demandé à l'aide de la colonne *diff.*

$$\left.\begin{array}{r} \text{Log. } x = 1,3380287 \\ 0180 \\ \hline 107. \end{array}\right\} \begin{array}{l} 217785 \\ x = 21,7785. \end{array}$$

Quand on veut trouver un 7e chiffre du nombre correspondant

à un logarithme, on continue comme il suit : 1er Ex. traité ; on a trouvé le reste 4, après avoir retranché 59 de 63 ; on fait suivre ce 4 d'un zéro, puis on cherche le nombre résultant, 40, dans la colonne de droite de la petite table de différences ; on trouve à gauche de 40 un 2 ; on écrit ce 2 à la droite de 218573 ; ce qui donne 2185732 ; puis, eu égard à la caractéristique, N = 218, 5732. On ne cherche un 7e chiffre qu'autant que la différence de deux logarithmes consécutifs (nombre en tête d'une petite table de différences), est supérieure à 100 (*).

Usage des petites tables de logarithmes à 7 décimales.

364. Dans les petites tables de logarithmes à 7 décimales (tables de Lalande), dont on se sert quelquefois, il n'y a pas de tables de différences proportionnelles comme dans les tables de Callet. La disposition de ces petites tables depuis le commencement jusqu'à la fin est celle des tables de Callet dans la 1re chiliade ; seulement à droite de chaque colonne de logarithmes, il y a de plus une colonne de différences ; chacune de ces différences est celle qui existe entre le logarithme qu'elle accompagne et le logarithme qui suit immédiatement.

Pour trouver le logarithme d'un nombre moindre que 10000, on fait comme il a été dit pour la 1re chiliade, page 262. Quand il s'agit du logarithme d'un nombre plus grand que 10000, il y a à faire un calcul dont les petites tables de différences proportionnelles de Callet nous ont dispensé.

Soit proposé de trouver le log. de 218276 avec ces petites tables : on sépare par une virgule sur la droite du nombre donné assez de chiffres pour que la partie entière du nombre résultant soit inférieur à 10000, *mais approche le plus possible* de 10000 ; on séparera donc 2 chiffres à droite dans notre exemple, et on cherchera log. 2182,76. Pour le trouver, on prendra d'abord dans la table log. 2182 = 3,3388547 ; puis on tire parti de la proposition suivante qui n'est pas tout à fait exacte, mais qui l'est d'autant plus, que les nombres auxquels on l'applique sont plus grands : la diffé-

(*) Ceci a été déjà expliqué à la fin du 1er Ex. Nous sommes entré dans les plus grands détails sur les problèmes 1° et 2°, page 262, parce que nous avons pensé que les élèves feraient plus attention à ce qui se trouverait dans leur arithmétique qu'à ce qui se trouve dans l'introduction de Callet.

rence entre les logarithmes de 2 nombres varie dans le même rapport que la différence de ces nombres. Cela posé, on prend dans la table, à droite du logarithme précédent, la différence 1990 qui existe entre log. 2182 et log. 2183. Ces nombres différant de 1, leurs logarithmes diffèrent de 1990; 2182 et 2182,76 différant de 0,76, trouver la différence x des logarithmes de ces 2 derniers nombres. On a l'égalité $\frac{0,76}{1} = \frac{x}{1990}$, d'où $x = 0,76 \times 1990 =$ 1512, 40; l'excès de log 2182, 76 sur log. 2182 est 1512, 40 unités du 7ᵉ ordre décimal; on ajoute 1512 au logarithme de 2182, et on trouve log. 2182,76=3,3390059; d'où log. 218276=5,3390059. A l'aide des petites tables de différences de Callet, on évite cette multiplication de 0,76 par 1990.

2ᵉ **Problème**. *Connaissant le logarithme d'un nombre, trouver ce nombre avec les petites tables.* Ex. : Log. $x = 2,3379476$.

On cherche parmi les logarithmes des nombres de 4 chiffres la partie décimale du logarithme donné, ou celle qui en approche le plus, *en moins*; on trouve 3378584 qui appartient au log. de 2177; on en conclut d'abord que les quatre premiers chiffres à gauche du nombre cherché forment le nombre 2177; pour le compléter autant que possible, on retranche le logarithme de la table du logarithme donné

$$\begin{array}{r} 3,3379476 \\ \ldots.8584 \\ \hline .892 \end{array}$$

La différence est 892; on prend la différence qui est dans la table à côté du log. approché 3,3378584; c'est 1995. Appelons x la différence entre 2177 et le nombre compris entre 2177 et 2178 qui a le logarithme donné; on écrit l'égalité de rapports $\frac{892}{1995} =$ $\frac{x}{1} = x$.

On évalue la valeur de x en fraction décimale jusqu'aux centièmes ou aux millièmes au plus; $x = 0,447$; on en conclut que 2177,447 est le nombre qui a pour logarithme 3,3379476; le nombre correspondant à 2, 3379476 sera 217,7447 à moins d'une unité du dernier chiffre.

Applications des logarithmes.

365. Quand un nombre inconnu résulte de multiplications, divisions, élévations de puissances ou extractions de racines à effectuer sur des nombres donnés, pour déterminer sa valeur, on cherche celle de son logarithme, qui résulte d'opérations beaucoup plus simples, additions, soustractions, multiplications ou divisions effectuées sur les logarithmes des nombres donnés; ce logarithme étant connu, le nombre correspondant se détermine de la manière indiquée n° 363.

Des nombres moindres que 1. D'après nos définitions, les nombres plus grands que 1 ont seuls des logarithmes; il est donc nécessaire, dans un calcul par logarithmes, que les nombres sur lesquels on opère, soient tous plus grands que 1. On pourra toujours faire en sorte que cela ait lieu en remarquant que multiplier ou diviser par un nombre $\frac{a}{b}$ moindre que 1, revient à diviser ou multiplier le même nombre par le nombre $\frac{b}{a}$ plus grand que 1.

Ou bien encore remarquons que

$$N \times \frac{25}{43} = \frac{N \times 25}{43}, \qquad N : \frac{25}{43} = \frac{N \times 43}{25};$$

$$N \times 0,0379 = N \times \frac{379}{10000} = \frac{N \times 379}{1000};$$

$$N : 0,0379 = N : \frac{379}{10000} = \frac{N \times 10000}{379}, \text{ etc.}$$

C'est-à-dire qu'à une opération ou à des opérations qui doivent être effectuées sur des fractions ordinaires ou décimales, on substitue par l'application des règles concernant les fractions ordinaires des opérations à effectuer sur des nombres entiers.

366. La seule difficulté qui puisse se présenter en réalité, c'est que le nombre cherché soit lui-même moindre que 1. Exemple : $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{11}\right)^3}$; car nos définitions n'assignent pas de logarithme à

un pareil nombre. Pour lever cette difficulté, on multiplie ce nombre, exprimé à l'aide des nombres donnés, par une puissance de 10, 10^n, assez considérable pour que le produit soit plus grand que 1. On détermine ce produit à l'aide des logarithmes; l'ayant trouvé, on le divise par la puissance susdite de 10, 10^n.

$$\text{Ex. :} \quad \sqrt[5]{\left(\frac{7}{11}\right)^8} = \left(10^n \times \sqrt[5]{\left(\frac{7}{11}\right)^8}\right) : 10^n.$$

367. Voici quelques exemples de calculs par logarithmes, sur lesquels on verra encore plus clairement la marche à suivre dans les cas particuliers susdits.

Trouver par logarithmes le produit $(3,141593)^2 \times 0,9938$.

$$x = (3,141593)^2 \times 0,9938 = (3,141593)^2 \times \frac{9938}{10000}.$$

$$\begin{aligned} \text{Log}\, x &= 2\log 3,141593 + \log 9938 - 4. \\ 2\log 3,141593 &= 0,9942998 \\ \log 9938 &= 3,9972990 \\ \hline \log x &= 0,9915988 \\ x &= 9,80841. \end{aligned}$$

Trouver par logarithmes le quotient de 0,9938 par 13,7864.

$$x = 0,9938 : 13,7864 = \frac{9938}{10000} : \frac{137864}{10000} = \frac{9938}{137864}$$

$x < 1$; on multiplie par $10^n = 10^2 = 100$; $100\,x = \frac{993800}{137864}$.

On cherche par log., $\frac{993800}{137864}$, qui est plus grand que 1; l'ayant trouvé, on le divisera par 100 pour avoir le nombre cherché x.

$$\begin{aligned} \text{Log}\, 993800 &= 5,9972990 \\ \text{Log}\, 137864 &= 5,1394509 \\ \hline & 0,8578481 \\ 100\,x &= 7,20855 \\ x &= 0,0720855. \end{aligned}$$

Calculer $x = \sqrt[7]{\left(\frac{7}{11}\right)^3}$.

x est un nombre moindre que 1; on écrira

$$10^n \times x = 10^n \times \sqrt[7]{\left(\frac{7}{11}\right)^3}.$$

$$\log(10^n \times x) = n + \frac{3\log 7 - 3\log 11}{7} = \frac{7n + 3\log 7 - 3\log 11}{7}.$$

$$3\log 7 = 2{,}5352941; \qquad 3\log 11 = 3{,}1241781;$$

on voit qu'il suffit de prendre $n = 1$, d'où $7n = 7$ pour que la soustraction indiquée puisse s'effectuer.

$$\begin{array}{rl} 7 + 3\log 7 & = 9{,}5352941 \\ 3\log 11 & = 3{,}1241781 \\ \hline & 6{,}4211160 \end{array}$$

$$\text{Log } 10\,x = \frac{6{,}4211160}{7} = 0{,}9173023$$

$$10x = 8{,}26613; \qquad x = 0{,}826613.$$

Calculer $x = \sqrt[3]{\frac{43 \times 237}{879^4}}$.

$$10^n \,.\, x = 10^n \sqrt[3]{\frac{43 \times 237}{879^4}}.$$

$$\text{Log}(10^n \,.\, x) = n + \frac{\log 43 + \log 237 - 4\log 879}{3} =$$

$$= \frac{3n + \log 43 + \log 237 - 4\log 879}{3}.$$

$$\log 43 = 1{,}6334684$$

$$\log 237 = 2{,}3747483 \qquad 4\log 879 = 11{,}7759555.$$

On prend $n = 3$; $3n = 9$

$$\begin{array}{rl} & 13{,}0082167 \\ 4\log 879 = & 11{,}7759555 \\ \hline & 1{,}2322612 \end{array}$$

Divisons par 3; $\log 10^3 . x = 0,4107872$

$$10^3 \times x = 2,57506 \quad ; \text{ d'où } x = 0,00257506.$$

Ayant calculé séparément log 43, log 237, 4 log 879, nous avons vu, à l'inspection des résultats, qu'il suffisait de prendre n égal à 3, ou $3n = 9$, pour que la soustraction indiquée pût se faire.

On agira toujours de même. La marche à suivre nous paraît suffisamment indiquée, et l'application des logarithmes nous paraît maintenant facile pour ceux qui comprennent bien leurs quatre principales propriétés.

368. *Emploi des compléments arithmétiques.* On appelle *complément arithmétique* d'un logarithme le nombre obtenu en retranchant ce logarithme de 10 (*); le complément obtenu s'indique ainsi : c^t. log 367 ; lisez complément logarithme 367 ;

$$c^{t.} \log 367 = 10 - \log 367.$$

soit donné $x = \dfrac{5467 \times 832}{367 \times 5431}$.

$$\log x = \log 5467 + \log 832 - \log 367 - \log 5431.$$

Introduisant les compléments, on peut écrire :

$$\log x = \log 5467 + \log 832 + 10 - \log 367 + 10 - \log 5431 - 20.$$

La soustraction de certains logarithmes est remplacée par l'addition de leurs compléments ; diminuer la caractéristique du logarithme donné de 20 est une opération qui ne compte pas. Le complément arithmétique d'un logarithme s'obtient en retranchant le 1er chiffre significatif à droite de 10, et les autres chiffres de 9 ; cette soustraction est des plus simples.

De ce que nous avons fait pour $\log x$, plus haut, on conclut facilement la règle suivante :

(*) Plus généralement, *on appelle complément arithmétique d'un nombre le reste obtenu en retranchant ce nombre de l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le nombre proposé.* Mais les logarithmes sont trop rarement supérieurs pour que nous ayons dû indiquer les compléments autrement que nous l'avons fait dans le texte.

Au lieu de soustraire des logarithmes, on peut ajouter aux logarithmes précédents les compléments arithmétiques des logarithmes à soustraire, à condition de retrancher ensuite de la somme obtenue ainsi autant de dizaines que l'on a ajouté de compléments. Si on emploie les compléments dans la dernière question traitée, on aura :

$$\log. 10^n x = \frac{3n + \log 43 + \log 337 + 4 \text{ c}^{\text{ts}} \log 879 - 40}{3}.$$

Sous cette forme, on voit peut-être un peu mieux quelle valeur la plus simple il convient de donner à l'indéterminée n. Chacun peut juger de la commodité que lui offre l'usage du complément arithmétique.

USAGE DE LA RÈGLE A CALCULS POUR LA MULTIPLICATION ET LA DIVISION.

Description et vérification de la règle.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que le lecteur a sous les yeux une règle à calculs, de Lenoir-Gravet, longue de 0mèt.,25, de la 1re division à la dernière.

369. La règle à calculs (règle logarithmique), est composée d'une *réglette* ou COULISSE, qui peut glisser dans la rainure d'une autre règle plus large, plus épaisse et de même longueur, que nous appellerons LA RÈGLE.

L'extrémité de la coulisse est munie d'un petit bouton qui sert à la mouvoir.

Les divisions supérieures de la règle forment deux *échelles* égales; la première est celle de gauche; la seconde, celle de droite (*). Les divisions des deux échelles sont identiquement les mêmes.

(*) La moitié de la partie divisée de la règle, 0mèt., 125 est prise pour unité pour construire les divisions de l'échelle; cette longueur, entre 1 et le premier 10, représente log. 10.

DIVISIONS PRINCIPALES. Cela posé, la longueur comprise entre 1 et 2 $= 0^m,125 \times \log 2$, et représente log 2; la longueur entre 1 et 3 $= 0^m, 125 \times \log 3$, et représente log 3; la longueur entre 1 et 4 $= 0^m, 125 \times \log 4$, et représente log 4, etc...

Subdivisions. La longueur comprise entre 1 et 1, 1 $= 0,125 \times \log (1, 1)$, et

Divisons par 3; $\log 10^3 . x = 0,4107872$

$10^3 \times x = 2,57506$; d'où $x =$

Ayant calculé séparément log 43, log 237, ...
vu, à l'inspection des résultats, qu'il suffisa...
3, ou $3n = 9$, pour que la soustraction ...

On agira toujours de même. La ma...
suffisamment indiquée, et l'applicatio...
rait maintenant facile pour ceux ...
quatre principales propriétés.

368. *Emploi des compléments a... ment arithmétique* d'un logarit... chant ce logarithme de 10 (...) ainsi : $c^t \cdot \log 367$; lisez com...

...traire des logarithmes, on peut ... les compléments arithmétiques ... la condition de retrancher ... tant de dizaines que l'on a ajouté de ... compléments dans la dernière ...

$c^t \cdot \log$ ...

log 331 + c^t log 879 − 10

soit donné $x = \dfrac{5467}{867}$ ... les divi-
... supérieures de
$\log x = \log$ ... premier 10 de la règle,
... échelle de la coulisse corres-
Introduisant ... échelle de la règle. On peut aussi
... nde échelle de la coulisse avec la 1re
$\log x$ ... ur s'assurer de la coïncidence de leurs di-
... anière, on s'assure que les échelles supérieures
La s... celles de la coulisse ont la même longueur, et sont
l'addi... unes comme les autres.
loga... nd le curseur est sous le premier 2 de la règle, il faut que
co... les nombres 2, 3, 4, 5, 6, etc., de la coulisse se trouvent sous 4,
l...

représente log (1, 1) ; la longueur entre 1 et 1, 2 = 0,125 × log (1, 2); elle représente log (1, 2), etc...

On mesure de même les intervalles qui marquent les centièmes.

La longueur comprise entre 1 et 1,02 = 0m 125 × log (1,02); elle représente log (1,02), etc...

Mais la longueur de la règle a seulement permis de marquer les centièmes de 2 en 2 entre les divisions principales 1 et 2, et de 5 en 5, entre 2 et 5. Sur les règles à calculs de 35 centimètres de long, on trace les divisions de centième en centième de 1 à 2; de 2 centièmes en 2 centièmes entre 2 et 3; de 5 centièmes en 5 centièmes entre 3 et 10.

6, 8, 10, 12, etc., etc., de la règle. Si on met le curseur sous le 1er 3 de la règle, les mêmes nombres 2, 3, 4, 5, 6... de la coulisse seront sous 6, 9, 12, 15, 18... de la règle, etc. (*).

Enfin, quand le curseur est au-dessus de 1 d'en bas, il faut que les nombres 2, 3, 4, etc., ainsi que 2, 5; 3, 4, etc., de l'échelle inférieure de la règle correspondent à leurs carrés 4, 9, 16, etc., 6, 25; 11, 56, etc., sur les divisions inférieures de la coulisse, considérées comme formant une seule échelle de 1 à 100.

Déterminer sur la RÈGLE *l'endroit qui correspond à un* NOMBRE DONNÉ.

371. PROPOSITION GÉNÉRALE. *Le même endroit de la règle correspond à tous les nombres qui deviennent égaux, quand on met dans chacun la virgule décimale après le 1er chiffre significatif à gauche* (**).

(*) *V.* le paragraphe suivant, n° 271, et la multiplication d'un nombre par 2, 3, etc...

(**) Cette proposition résulte de ce que la demi-longueur de la règle, 0,125mèt. étant prise pour unité, la longueur comprise entre le n° 1 et un endroit quelconque de la 1re échelle de la règle est la représentation *matérielle* d'un des logarithmes de la table de Callet, pris avec la caractéristique 0 (V. la note page 279); c'est la partie décimale d'un logarithme à caractéristique quelconque, représentée sous une forme sensible. Or les logarithmes de tous les nombres ci-dessus indiqués, n° 271, ont la même partie décimale.

Si on considère les deux échelles de la règle réunies comme n'en faisant qu'une, les longueurs mesurées entre le premier 1 et le second 10 représentent les logarithmes des nombres de 1 à 100, pris avec leur caractéristique exacte.

C'est ici qu'il faut remarquer ce qu'il y a d'ingénieux dans l'invention de la règle à calculs.

La continuité de la longueur de la règle parcourue du premier 1 au premier 10 correspond à la continuité de la partie décimale du logarithme d'un nombre qui varie lui-même d'une manière continue de 1 à 10; puis en recommençant de 10 à 100; puis de même de 100 à 1000, etc. Ce nombre étant supposé évalué en décimales avec une approximation indéfinie, tous les logarithmes sont ainsi représentés, sauf la caractéristique, dont il n'y a pas à s'embarrasser.

Au point de vue pratique, l'utilité de la règle à calculs est bornée uniquement par l'impossibilité pour le calculateur, ou pour l'artiste qui divise la règle, de distinguer deux longueurs dont la différence atteint un certain degré de petitesse. L'utilité de cette règle croît avec sa longueur; ainsi la règle de 35 centimètres est un peu plus utile que celle de 25 centimètres; avec une grande règle

Ex. : Le même endroit de la règle correspond aux nombres 3,47; 34,7; 347; 3470 ; 34700, etc...; 0,347; 0,0347, etc.

De là cette 1re règle générale :

372. *Pour trouver l'endroit de la règle qui correspond à un nombre donné, commencez par mettre effectivement, ou par la pensée, une virgule décimale à la droite du 1er chiffre significatif à gauche du nombre donné; puis, cherchez l'endroit de la règle correspondant au nombre ainsi obtenu, comme nous allons l'indiquer pour les différents cas.*

1er CAS. *Le nombre donné n'a qu'un chiffre significatif.* Ex. : 4. L'endroit correspondant de la règle est celui où est marqué le premier 4 (1re échelle supérieure de gauche).

2e CAS. *Le nombre donné a deux chiffres significatifs.* Ex. : 4,7. L'endroit correspondant est entre le 4 et le 5 de l'échelle de gauche, à la 7e des divisions qui indiquent les dixièmes.

3e CAS. *Le nombre donné a 3 chiffres significatifs.* Ex. : 6,73. On cherche l'endroit de 6,7 et celui de 6,8 (2e cas); puis, au delà de 6,7, on prend les 0,3 de l'intervalle des 2 endroits susdits; au bout est l'endroit de 6,73 (*).

Quand le 1er chiffre significatif est 1, on opère par exception comme il suit : Ex. : 1,76 ; on cherche le 7e trait qui marque les dixièmes entre 1 et 2; puis, au delà, le 3e des traits plus petits intermédiaires entre le 7e et le 8e dixième (3, moitié de 6); ce 3e trait marque l'endroit de 1,76. Si le 3e chiffre était impair, ex.: 1,77, on chercherait l'endroit de 1,76 et celui de 1,78, le milieu entre ces 2 endroits est l'endroit de 1,77.

Quand le 1er chiffre d'un nombre étant 2, 3, ou 4, le dernier est 5, ex. : 3,75, l'endroit est au petit trait marqué entre 3,7 et 3,8 (2e cas).

2e Ex. : 4,08. Cherchez 4,05; puis, en plus, prenez les $\frac{3}{5}$ de l'intervalle compris entre 4,05 et 4,1.

---

comme en en voit dans les colléges et dans certains établissements, on peut opérer sur les nombres ayant plus de 3 chiffres, à partir du premier significatif à gauche.

(*) Dès que le nombre a 3 chiffres, on commence à faire application de ce principe dont il a été question (Théorie des logarithmes, n° 364), et qui n'est pas tout à fait exact : *la différence de deux logarithmes varie dans le même rapport que la différence des nombres correspondants.*

4e CAS. *Le nombre donné a quatre chiffres significatifs*. Ex. : 4,736. On cherche l'endroit de 4,73 et celui de 4,74 (3e cas) ; puis à partir de 4,73, on prend les 0,6 ou les 3/5 de l'intervalle qui sépare 4,73 de 4,74 ; au bout est l'endroit cherché correspondant à 4,736.

Ainsi de suite, on pourrait continuer indéfiniment de la même manière ; mais, pour rester dans la vérité pratique, hâtons-nous d'observer qu'avec la règle de 25 centimètres divisés, il est très-difficile d'avoir égard aux chiffres significatifs qui suivent les 3 premiers à gauche d'un nombre donné, excepté peut-être pour ceux qui commencent à 1 (et cela parce que l'intervalle entre 1 et 2 est plus grand que les autres).

On détermine de même l'endroit qui correspond à un nombre donné sur la règle de 85 centimètres divisés.

L'application de la méthode de lecture ci-dessus devient d'autant plus facile, et s'étend d'autant plus que la règle à calculs est plus longue.

373. *Remarque*. Tout ce que nous avons dit s'applique à la 2e échelle (celle à droite), commençant au premier 10 ; seulement il faut alors faire abstraction de l'échelle de gauche, et lire 1 au lieu de ce premier 10, au commencement de la 2e échelle.

Lire le nombre qui correspond à un endroit déterminé de la RÈGLE.

374. Ce qui va suivre s'applique, quelle que soit celle des deux échelles supérieures de la règle sur laquelle se trouve l'endroit considéré ; seulement, si cet endroit est sur la 2e échelle (celle de droite), il faut lire 1 au lieu de 10 sur cette échelle, partir de ce numéro ainsi modifié comme si la 1re échelle n'existait pas, pour appliquer littéralement la méthode qui va être indiquée pour résoudre la question proposée.

Pour plus de régularité, il conviendrait de mettre une virgule après le 1er chiffre qui sera fourni par la méthode suivante ; de sorte que le nombre obtenu serait toujours compris entre 1 et 10 ; il serait ensuite facile, dans chaque question particulière, de passer de ce nombre à celui qui convient à la question. Mais cette virgule n'est pas absolument nécessaire (*).

(*) L'emploi de cette virgule est commode pour se rendre compte théorique-

1° *A l'endroit considéré, il y a un numéro de la règle.* Par ex. : 3.

On écrit simplement ce numéro, c'est la partie significative du nombre donné; la valeur exacte de ce nombre, 3, ou 30, ou 300, etc..., ou 0,3, ou 0,03, etc., se détermine par les circonstances de la question traitée (*V.* la multiplication et la division).

2° *A l'endroit considéré, il y a un des traits qui marquent les* DIXIÈMES

On écrit d'abord le numéro de l'échelle, qui se trouve immédiatement à gauche de cet endroit donné; puis, à droite de ce chiffre, le nombre des dixièmes compris entre ce numéro et l'endroit considéré. Les 2 chiffres ainsi trouvés constituent la partie significative du nombre cherché; par exemple, on a trouvé 37; on lira 37, ou 370, ou 3700, etc., ou 3,7, ou 0,37, ou 0,037, etc.; cela dépendra des circonstances de la question traitée (*V.* la multiplication et la division).

3° *L'endroit considéré est entre* 1 *et* 2 *de l'une ou de l'autre échelle, et à cet endroit, il y a un trait marquant les centièmes.*

On écrit d'abord 1; à droite, on met le nombre des dixièmes compris entre 1 et l'endroit considéré; puis pour 3° chiffre le produit de 2 par le nombre de petits traits de centièmes qui suivent le dernier dixième jusqu'à l'endroit considéré. Supposons que de cette manière on ait marqué 146; le nombre cherché sera 146, ou 1460, ou 14600, etc.; ou 14,6 ou 1,46; ou 0,146, ou 0,0146, etc., suivant les circonstances de la question traitée.

4° *L'endroit considéré est entre* 2 *et* 5 *de l'une ou de l'autre échelle, et à cet endroit, il y a un trait marquant des centièmes.*

On écrit d'abord le numéro de l'échelle qui se trouve immédiatement à gauche; à droite de ce chiffre le nombre des dixièmes compris entre ce chiffre et l'endroit considéré; puis enfin le chiffre 5. Supposons qu'on ait ainsi obtenu le nombre 345; le nombre cherché est 345, ou 3450, ou 34500, etc., ou 34,5, ou 3,45, etc..., suivant les circonstances de la question proposée.

5° *A l'endroit déterminé, il n'y a aucune marque de division;* on

---

ment de ce que l'on fait (*Voir* la note, page 281). C'est pour cela que nous l'avons employée dans la résolution du précédent problème; car dans celui-là aussi, on peut se passer à la rigueur de cette transposition de la virgule.

considère le trait qui, situé immédiatement à gauche, marque les dixièmes; on écrit le nombre de 2 chiffres qui correspond à l'endroit de ce trait (2°); puis on estime, à vue d'œil, combien de dixièmes de l'intervalle qui sépare les deux traits consécutifs de dixièmes, vaut l'intervalle compris entre le dernier dixième et l'endroit considéré. Ce nombre de dixièmes est un 3e chiffre à ajouter aux deux premiers indiqués. Si on a trouvé ainsi 347, on en déduira le nombre qui convient à la question comme dans les autres cas. Si l'endroit considéré était situé entre un n° de la règle et le 1er dixième suivant, il faudrait mettre 0 pour 2e chiffre.

Si le 1er chiffre trouvé dans ce cinquième cas est 1, on écrit pour 3e chiffre $2 \times n + 1$, n étant le nombre de petits traits de centièmes comptés du dernier dixième à gauche de l'endroit considéré jusqu'à cet endroit, si celui-ci est, à très-peu près, au milieu entre les deux traits de centièmes; autrement, on met après les deux chiffres trouvés un autre nombre de 2 chiffres exprimant en centièmes la fraction de l'intervalle des deux petits traits compris entre le premier de ces petits traits et l'endroit considéré ($1/3 = 0,33$; $1/4 = 0,25$; $1/5 = 0,20$, etc.).

On profite d'une manière analogue du petit trait qui se trouve entre 2 dixièmes consécutifs de 2 à 5 de l'échelle.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, la règle à calculs ne peut pas fournir plus de 3 chiffres à partir du premier significatif à gauche d'un nombre cherché, excepté peut-être pour les nombres qui commencent par 1; pour ceux-là, avec de l'habitude et de la précision dans la vue, on pourrait peut-être obtenir un 4e chiffre à droite.

Sur une règle à calculs plus grande, on pourrait marquer les centièmes (d'après les logarithmes des nombres de trois chiffres, tels que log 1,27); avec cette règle, on déterminerait d'abord à première vue, et exactement 1, 2, 3 chiffres d'un nombre à partir du 1er significatif à gauche, puis le 4e chiffre par le mode indiqué plus haut pour le 3e.

Nous engageons les élèves à beaucoup s'exercer à la résolution des deux problèmes précédents analogues aux deux problèmes que l'on résout à l'aide des tables de logarithmes 1° et 2°, n° 360.

MULTIPLICATION

Effectuée à l'aide d'une règle à calculs.

375. 1re RÈGLE. On prépare les facteurs, au besoin, comme il est dit n° 372. *Cela fait, on amène le* CURSEUR *sous l'un des* FACTEURS *pris sur la 1re échelle de la règle; le* PRODUIT *se lit au-dessus de l'autre* FACTEUR *pris sur la 1re échelle de la coulisse* (*).

1er Ex. : 4×2. On amène le curseur sous le 4 de la règle (1re échelle); au-dessus du 2e facteur 2 pris sur la 1re échelle de la coulisse, on lit 8, qui est le produit demandé.

On indique ainsi ce qui se passe dans cette opération :

Règle; ligne supérieure.	4	$x = 8$	
coulisse.	1	2	

En mettant le curseur sous le 2, on trouve le produit 8 au-dessus du 4 de la coulisse.

376. En retournant bout pour bout la coulisse (c'est-à-dire, en la faisant entrer dans la rainure par le bout opposé, n° 10), et amenant l'un sous l'autre les facteurs pris sur la 1re échelle de la coulisse et de la règle, on lit le produit au-dessus du curseur.

Ce qui se passe dans cette opération peut se figurer ainsi :

Règle; ligne supérieure.	4	$x = 8$	(**).
coulisse retournée.	2	1	

Nous suivrons préférablement la 1re règle

2e Ex. : $1,36 \times 8$. On amène le curseur sous l'endroit de 1,36

(*) La longueur de la règle de 1 à l'endroit du curseur = log. du 1er facteur; la longueur de la même, du curseur à l'endroit du 2e facteur pris sur la coulisse = log. 2e facteur; or log. 1er facteur + log. 2e facteur = log. produit. Donc à l'extrémité de ces deux, longueurs, c'est-à-dire, au-dessus du 2e facteur pris sur la coulisse, doit se lire le produit.

(**) Longueur de la règle de 1 à l'endroit qui correspond au facteur 4 = log 4; de ce dernier endroit sur la coulisse jusqu'au curseur 1, la longueur = log 2; sur la règle, de 1 à l'endroit du curseur; il y a log 4 + log 2 = (4×2); on doit donc lire le produit au-dessus du curseur.

(nous dirons sous 1,36). V. n° 372, 3° cas; au-dessus du 3 de la coulisse, on lit 408 (n° 374, 5°). Le produit est 4,08.

$$\begin{array}{l|cc} \text{Règle ; ligne supérieure. .} & 1{,}36 & x=408 \\ \hline \text{coulisse. . . . . .} & 1 & 3 \end{array} \; ; 1{,}36\times 3=4{,}08.$$

3° Ex. : 38×3. Lisez 3,8×3. Appliquant la 1[re] règle, on amène le curseur sous l'endroit 3,8 de la règle : on lit, sur la 2[e] échelle de la règle, au-dessus du 3 du curseur, 114 (n° 374, 3°); c'est le produit ; il n'y a pas de virgule à mettre.

4° Ex. : 0,78 × 4. Lisez 7,8 × 4. Appliquant la 1[re] règle, on lit sur la 2[e] échelle de la règle au-dessus du 4 du curseur, 312 (n° 374, 5°). A l'inspection des facteurs, on voit qu'il faut 2 décimales au produit ; le produit demandé est donc 3,12. Eu égard à la règle (177) qui fixe à priori la place de la virgule dans le produit de deux nombres donnés, il n'y aura jamais aucun inconvénient à transformer au besoin l'un ou l'autre facteur, comme il est indiqué dans la règle du n° 372.

377. *Remarque générale.* Quand le curseur et le facteur, pris sur la même échelle de la coulisse, se trouvent tous deux sur la même échelle de la règle, le produit a autant de chiffres moins 1 qu'il y en a dans les deux facteurs à la fois. Ex. : 23 × 4.

Quand le curseur et le facteur, pris sur la même échelle de la coulisse, ne correspondent pas à la même échelle de la règle, le produit a autant de chiffres qu'il y en a dans les 2 facteurs à la fois. Ex. : 23 × 6 (*).

(*) Chaque facteur donné, transformé au besoin suivant la règle générale du n° 372, a un seul chiffre à sa partie entière. 1[er] Ex. : 2,3×4; 2° Ex. : 2,3×6. La caractéristique du log. de chaque facteur est 0; l'un est sur la 1[re] échelle de la règle, l'autre sur la 1[re] échelle de la coulisse.

1[er] Cas. Cela posé, si le produit est sur la 1[re] échelle de la règle, son log. a la caractéristique 0 ; la partie entière de ce produit n'a qu'un seul chiffre ; comme ce produit a d'ailleurs autant de chiffres décimaux que ses deux facteurs à la fois, il a autant de chiffres moins un que ses 2 facteurs.

2[e] Cas. Si, au contraire, le produit se lit sur la 2[e] échelle de la règle, comme la somme des deux longueurs, log. du multiplicande plus log. du multiplicateur, se compte, à partir du premier 1 de la règle, jusqu'à l'endroit de cette règle correspondant au multiplicateur pris sur la coulisse, il faut considérer cette longueur totale comme le logarithme du produit (ayant la caractéristique 1) (*Voir* la note, page 281, pour le cas où les échelles se continuent mutuellement). Le

Ceci est dit, abstraction faite de toute virgule décimale. Les deux cas que nous indiquons sont les seuls qui peuvent se présenter; on démontre donc ainsi à l'aide de la règle à calculs le principe du n° 24, (Remarque), et la démonstration est générale.

Cette remarque a son utilité pratique, non pas quand la partie entière du produit doit avoir au plus autant de chiffres qu'en fournit la règle, mais quand elle doit en avoir davantage; auquel cas, on doit ajouter des zéros aux trois ou quatre chiffres fournis, au plus, par la règle. Connaissant par cette remarque le nombre des chiffres du produit, et sachant d'ailleurs le nombre de ses chiffres décimaux, s'il en a, on connaît le nombre des chiffres de sa partie entière, et cela suffit pour qu'on écrive sa valeur, à moins d'une unité de l'ordre du dernier chiffre fourni exactement par la règle.

Ex. : 237,48 × 51,4. L'emploi de la règle fournira le produit à moins d'une demi-unité du 3ᵉ chiffre, ou si l'on y met beaucoup de précision, à moins d'une unité du 4ᵉ chiffre, de gauche à droite, et fera connaître que la partie entière du produit doit avoir cinq chiffres.

Exemples :

1°	3, 5 × 5,5 = 19,25	ligne supér. / coulisse. . .	$\frac{x = 3{,}5}{1}$	$\frac{x = 1925}{5{,}5}$
	0, 35 × 45 = 15,75	ligne supér. / coulisse. . .	$\frac{x = 3{,}5}{1}$	$\frac{= 1575}{4{,}5}$
	0,025 × 65 = 1,625	ligne supér. / coulisse. . .	$\frac{x = 2{,}5}{1}$	$\frac{= 1625}{6{,}5.}$

Suivant notre méthode (374) pour lire le résultat sur la 2ᵉ échelle comme sur la première, on lira les produits précédents ainsi : 1925, 1575, 1625; on met ensuite la virgule à sa place, à l'inspection des deux facteurs donnés.

---

log. du produit ayant la caractéristique 1, ce produit a 2 chiffres à sa partie entière, tandis que chaque facteur n'en a qu'un; d'ailleurs le produit a autant de chiffres décimaux que ses deux facteurs; donc, etc...

DIVISION.

Effectuée à l'aide de la règle à calcul.

378. Règle. On prépare le dividende et le diviseur suivant la règle du n° 372; cela fait, *on amène le diviseur pris sur la 1re échelle de la coulisse sous le dividende pris sur la 2e échelle de la règle; le quotient se lit au-dessus du curseur* (*).

Ex. : 84 : 3. Lisez 8,4 : 3.

Règle. Ligne supér.	$x = 28$	8,4	84 : 3 = 28.
Coulisse.	1	3	

2e Ex. : 15,75 : 35.

Règle. Ligne supér.	$x = 45$	15,75	15,75 : 35 = 0,45.
Coulisse.	1	3,5	

Le quotient étant trouvé, la considération de la virgule du dividende et du diviseur détermine la place de la virgule du quotient, s'il y a lieu (V. les exemples ci-dessuset les suivants).

379. Quand le diviseur pris avec autant de chiffres à sa partie

(*) Quand on applique cette règle, il peut se présenter deux cas : 1° le diviseur et le curseur pris sur la coulisse correspondent à la même échelle de la règle; 2° ils correspondent à deux échelles différentes.

1er Cas. La longueur comprise entre le premier 10 (1 de la 2e échelle) et le dividende = log. du dividende (avec la caractéristique 0); la longueur comprise entre le curseur et le diviseur situé sous le dividende = log. diviseur(caractéristique 0); la différence des deux longueurs, ou la longueur comprise entre le premier 10 et le curseur = log. du quotient (caractéristique 0); c'est pourquoi, à l'extrémité de cette dernière longueur, de droite à gauche, on lit le quotient au-dessus du curseur.

2e Cas. Dans ce cas, ilf aut supposer que les deux échelles n'en faisant qu'une, la longueur de la règle depuis 1 de la 1re. échelle jusqu'au dividende = log. dividende (celui-ci ayant la caractéristique 1). Longueur de la coulisse du curseur au diviseur = log. diviseur (caractéristique 0); la différence de ces deux longueurs ou la distance du n° 1 de la 1re échelle au curseur = log. du quotient (caractéristique 0); on doit donc lire le quotient sur la 1re échelle de la règle au bout de cette longueur, c'est-à-dire au-dessus du curseur.

entière que le dividende est moindre que celui-ci, on peut encore opérer comme il suit :

On amène le diviseur pris sur la 1re échelle de la coulisse sous le dividende lu sur la 1re échelle de la règle. Le curseur est alors sous le quotient.

On peut le faire pour notre 1er Ex., 84 : 3. On ne peut pas le faire pour le second. La raison en est évidente.

A la première règle, comme règle générale, on peut substituer celle-ci.

380. Règle. *Retournant, bout pour bout, la coulisse, on amène le curseur sous le dividende, pris sur la 2e échelle de la règle; le quotient se lit au-dessus du diviseur pris sur la 1re échelle de la coulisse* (*).

1er Ex. : 84 : 3.

Règle. Ligne supér.	$x = 28$	84	84 : 3 = 28.
Coulisse retournée.	3	1	

2e Ex. : 15,75 : 35.

Règle. Ligne supér.	$x = 45$	15,75	15,75 : 35 = 0,45.
Coulisse retournée.	3,5	1	

Nous pouvons faire une remarque utile quant au nombre de chiffres du quotient.

381. Remarque. Quand le curseur et le diviseur pris sur la même échelle de la coulisse correspondent à la même échelle de

(*) Cette règle se démontre comme l'autre; on considère les deux mêmes cas.

1er Cas. Longueur sur la 2e échelle du premier 10 (lisez 1) au dividende = log. divid. (avec la caractéristique 0). Cette longueur se décompose en 2 parties,... une 1re longueur log. x = (caractéristique 0) depuis le premier 10 jusqu'à l'endroit situé au-dessus du diviseur pris sur la coulisse; une 2e longueur = dist. du diviseur au curseur = log. du diviseur (caractéristique 0); log x + log. diviseur = log. dividende; donc log. x = log. quotient.

2e Cas. Les deux échelles se continuant, longueur de 1 au dividende = log. divid. (avec la caractéristique 1); cette longueur se décompose en 2 parties (à rebours): longueur du curseur au diviseur = log. divis. (avec la caractéristique 0), plus une longueur x depuis le diviseur jusqu'à 1 de la 1re échelle = log. x (caractéristique 0); donc, etc.

la règle, le dividende (*produit*) a autant de chiffres moins un qu'il y en a dans le diviseur et le quotient à la fois (abstraction faite de toute virgule). Quand le curseur et le diviseur pris sur la même échelle de la coulisse correspondent à deux échelles différentes, le dividende (produit) a autant de chiffres que le diviseur et le quotient à la fois. Connaissant le nombre des chiffres du dividende et du diviseur, on déduit de cette remarque, dans les deux cas, le nombre des chiffres du quotient.

Cette remarque est la conséquence de celle qui a été faite n° 377, après la règle de multiplication; elle est utile dans le cas qui a été indiqué alors.

382. APPLICATION. *Convertir une fraction ordinaire en fraction décimale.*

On sait qu'il faut diviser le numérateur par le dénominateur. Ex. : Convertir 3/16 en fraction décimale.

On amène le diviseur 16 (lisez 1,6), pris sur la coulisse sous le dividende 3, pris sur l'une des échelles de la règle, n° 378; puis on lit le quotient sur la règle au-dessus du curseur. On lit très-facilement 1875 (*); comme il est évident à l'inspection de la fraction donnée, que le 1er chiffre décimal est celui des dixièmes, on écrira 0,1875.

2e Ex. : Convertir 1/367 en décimales.

On amène le diviseur 367 (lisez 3,67) sous le dividende 1 (2e échelle) (lisez 10); puis on lit le quotient sur la règle au-dessus du curseur; on lit aisément 272; à la simple inspection de 1 suivi de trois zéros, on voit que la fraction décimale doit commencer aux millièmes; on écrira donc 1/367 $\doteq$ 0,00272.

Le 1er résultat peut n'être qu'approché, à moins d'une unité du 4e chiffre significatif, et le 2e qu'à moins du troisième (*idem*).

383. Si on veut employer la règle à calculs pour la multiplication ou la division de nombres fractionnaires, on commence par

(*) 1° Le numéro de la règle qui précède le curseur est 1; 2° de 1 au curseur il y a 8 traits de dixièmes; 3° du 8e trait de dixièmes au curseur il y a 3 traits de 2 centièmes, plus $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ de 2 centièmes $=$ 7,5 centièmes, ce qui donne bien 1875, abstraction faite de toute virgule, pour le 2e exemple. La lecture est aussi facile.

convertir ceux-ci en nombres décimaux; puis on opère sur ces nombres décimaux.

On peut traiter le problème ci-dessus n° 382, à l'aide de tables de logarithmes.

Convertir $\frac{41}{145}$ en décimales à l'aide des logarithmes.

$$\text{Log.}\ \frac{41 \times 10^n}{145} = \text{log.}\ 41 - \text{log.}\ 145 + n.$$

$$\text{Log.}\ 41 = 1,61278386 \quad ; \text{log.}\ 145 = 2,16136800$$

$n = 1$ suffit $\qquad n = 1$

$$n + \text{log.}\ 41 = 2,6127838$$
$$\text{log.}\ 145 = 2,1613680$$
$$\text{log.}\ x10 = 0,4514158$$
$$10x = 2,827586.$$
$$x = 2,2827586.$$

Convertir $\frac{1}{367}$ en décimales.

On prend ici $\qquad n = 3$

$$1000x = \frac{1000}{367}.$$

$$\text{Log}\ 1000x = 3 - \text{log}\ 367 = 0,4353339$$
$$1000x = 2,7248.$$
$$x = 0,0027248.$$

COMPLÉMENT

DU

COURS D'ARITHMÉTIQUE.

APPLICATIONS AUX SCIENCES, AU COMMERCE ET A LA BANQUE.

---

384. Introduction. Nous donnons en commençant quelques conseils généraux et faisons connaître quelques principes non encore établis, qui nous paraissent utiles, souvent nécessaires, dans les applications. Mais presque aussitôt, à partir de la page 297, nous nous occupons exclusivement de problèmes et d'applications.

Très-souvent les valeurs numériques des grandeurs considérées sont inexactes, soit parce qu'on ne veut employer que des nombres décimaux, soit à cause de l'imperfection de nos instruments de mesure, soit enfin parce que les grandeurs en question n'ont réellement pas de commune mesure avec l'unité de leur espèce, ou bien les unes avec les autres. Il résulte de là que les résultats des opérations effectuées sur ces valeurs numériques sont eux-mêmes inexacts à un certain degré; dans chaque cas particulier, il faut se préoccuper du degré d'exactitude avec lequel on veut, ou peut obtenir le résultat.

Nous avons déjà indiqué le moyen d'évaluer, à moins d'une unité décimale donnée, un produit, un quotient, une racine carrée ou cubique, en supposant que l'on ait à sa disposition des valeurs décimales aussi approchées que l'on veut. On voit facilement le degré d'approximation que les méthodes ou principes indiqués permettent d'atteindre pour le résultat quand l'approximation des grandeurs données est bornée à certaines limites.

Il nous reste à faire pour l'addition et la soustraction ce que nous avons fait pour les autres opérations principales ; on a dû déjà en sentir la nécessité lors de la conversion des mesures anciennes ou étrangères.

Nous le ferons succinctement et d'une manière générale, les applications devant suivre immédiatement.

Addition.

385. Valeurs exactes A, B, C, D ; valeurs approchées A', B', C', D' ; soient e', e'', e''', e'''' les erreurs absolues partielles ; de $A = A' + e'$, $B = B' + e''$, $C = C' + e'''$, $D = D' + e''''$, on déduit, en additionnant $A+B+C+D = A'+B'+C'+D'+e'+e''+e'''+e''''$;

D'où l'erreur absolue de la somme

$$A+B+C+D - (A'+B'+C'+D') = e'+e''+e'''+e''''.$$

L'erreur absolue commise sur une somme est égale à la somme des erreurs absolues commises sur ses parties.

Supposons qu'ayant 8 valeurs inexactes parmi des nombres à additionner, on veuille avoir cette somme à moins de 0,01. La somme des 8 erreurs devant être moindre que 0,01, il suffira que chacune d'elles soit moindre que $\frac{1}{800}$, ou en décimales, moindre que 0,001.

386. En général, pour avoir la somme de m nombres inexacts, à moins de $\frac{1}{d}$, il suffit que chaque nombre soit approché à moins de $\frac{1}{d \times m}$.

387. L'erreur relative de la somme est $\frac{e'+e''+e'''+e''''}{A+B+C+D} < \frac{e'+e''+e'''+e''''}{A'+B'+C'+D'}$. Si dans cette expression on remplace la somme $e'+e''+e'''+e''''$ par une limite supérieure connue, on aura une limite supérieure de l'erreur relative de la somme dans chaque cas.

L'erreur relative de la somme est moindre que la somme des

erreurs absolues partielles divisée par la somme des valeurs approchées (*).

Soustraction.

388. On prend ordinairement le plus grand nombre approché par défaut, et le plus petit par excès, afin d'avoir le reste approché par défaut.

Valeurs exactes A et B; valeurs approchées A', B'; erreurs absolues, e', e''.

$$A' = A - e',\ B' = B + e'';$$

$$A' - B' = A - e' - (B + e'') = A - B - e' - e''.$$

Erreur en moins, $e' + e''$.

L'erreur commise sur une différence est égale, dans notre hypothèse, à la somme des erreurs commises sur les deux nombres donnés.

D'où il résulte que si on veut avoir un reste approché à moins de 0,01, en général, à moins de $\frac{1}{m}$, il suffira que chaque nombre donné soit approché à moins d'un demi-centième, en général, à moins de $\frac{1}{2m}$.

389. Quant à l'erreur relative, elle a pour valeur $\frac{e' + e''}{A - B}$, et pour limite supérieure, $\frac{e' + e''}{A' - B'}$; remplaçant donc e' et e'' par

(*) Si on veut considérer les erreurs relatives à part, il suffira d'observer que *l'erreur relative d'une somme*; ex. : $\frac{e' + e'' + e''' + e''''}{A + B + C + D}$ *est inférieure à la plus grande, et supérieure à la plus petite des erreurs relatives des parties*, $\frac{e'}{A}$, $\frac{e''}{B}$, $\frac{e'''}{C}$, $\frac{e''''}{D}$; cela résulte de la proposition sur les rapports, démontrée n° 155, laquelle est générale, puisqu'elle ne s'appuie que sur la définition générale du rapport. En vertu de cette proposition, il sera avantageux de considérer les erreurs relatives quand les limites de ces erreurs seront peu différentes; autrement il vaudra mieux tenir compte des erreurs absolues.

leurs limites supérieures connues, on aura facilement une limite supérieure de l'erreur relative : on voit que la grandeur de l'erreur relative du reste ne dépend pas tant des erreurs relatives partielles que de la différence des grandeurs considérées. C'est d'ailleurs la même chose pour la somme.

390. *Remarques sur la multiplication et la division.* Quand un nombre qui a beaucoup de chiffres doit être souvent employé comme multiplicateur ou diviseur, le calculateur trouve avantage à imiter ce que nous avons déjà fait pour la division n° 36 ; il fait bien de former, par voie d'addition, des tableaux tels que ceux-ci :

Multiples de π.		*Multiples de* $\frac{1}{\pi}$.	
1.....	3,14159265358979	1.....	0,3183098861
2	6,28318530717958	2.....	0,63661977
3.....	9,42477796076937	3.....	0,95492966
4.....	12,56637061435916	4.....	1,27323954
5.....	15,70796326794995	5.....	1,59154943
6.....	18,84955592153874	6.....	1,90985931
7.....	21,99114857512853	7.....	2,22816920
8.....	25,13274122871832	8.....	2,54647908
9.....	28,13233398230811	9.....	2,86478897

Ces valeurs sont approchées par défaut.

On peut, comme exercice, former ainsi les multiples de

$$\log e = 0{,}4342944681903 \quad \text{ou de} \quad \frac{1}{\log e} = 2{,}302585092.$$

Quand on doit diviser souvent par un nombre de beaucoup de chiffres, par ex. : π ou $\log e$, il est plus commode de multiplier par le quotient de l'unité par ce nombre. Ex. : $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\log e}$.

Quand on doit multiplier par un nombre dont tous les chiffres sont grands, ex : $g = 9{,}80896$, il est avantageux de remplacer ce nombre, par ce qu'on appelle son complément arithmétique, de cette manière : Ex. : $647 \times g$; on remplace g par $10 - g = 0{,}19104$; on multiplie 647 par 0,19104, et on retranche le produit de 647×10.

$$647 \times g = 647 \times (10 - 0{,}19104) = 6470 - 647 \times 0{,}19104.$$

Problèmes sur les monnaies.

391. Problème. *Un Autrichien apporte au change de l'hôtel des monnaies de Paris* 21 *ducats de l'empereur,* 15 *souverains,* 42 *florins. On demande, à moins de* 1 *centime, combien il recevra d'argent de France?* (V. les Tableaux, page 173.)

Le titre d'une pièce d'or est le poids d'or pur contenu dans une unité de poids du métal de la pièce; le titre d'un ducat étant $0^{gr.},986$, cela veut dire que sur chaque gramme pesant, la pièce renferme $0^{gr.},986$ d'or pur; pour 1 ducat, c'est $0^{gr.},986 \times 3,490$; et pour 21 ducats $0^{gr.},986 \times 3,490 \times 21$; on trouve de même que le poids de l'or pur contenu dans les 15 souverains est $0^{gr.},317 \times 5,567 \times 15$.

Ayant fait successivement ces deux calculs, on additionnera ces deux poids d'or pur; puis, on multipliera par le prix de 1 gramme d'or pur, valeur au change, frais de fabrication déduits, lequel est $3^{fr.},43778$ (page 188).

D'une autre part, on multipliera le titre du florin, 0,833, par son poids $14^{gr.},532$, et le produit par 42; on aura ainsi en grammes le poids de l'argent pur contenu dans les 42 florins; enfin, on multipliera par le nombre décimal obtenu la valeur d'un gramme d'argent, valeur au change, laquelle est $0^{fr.},22056$; il ne restera plus qu'à additionner les valeurs de l'or et de l'argent. Il sera bon d'employer la multiplication abrégée pour obtenir la valeur cherchée à moins de 1 centime. (V. ce qui est fait au problème suivant.) V. n° 386 pour l'approximation de chacune des valeurs partielles.

Combien y a-t-il d'argent pur dans $367^{gr.},27$ *d'argent au titre de* 0,950, *et quelle est la valeur, à* 1 *centime près, de cet argent au change des monnaies?* (V. page 188.)

Sur chaque gramme de cet alliage, il y a $0^{gr.},950$ d'argent pur; sur $367^{gr.},27$, il y aura $0^{gr.}.950 \times 367,27$; ayant la quantité d'argent pur, il ne restera plus qu'à multiplier par le prix de 1 gramme d'argent pur, valeur nominale au change, qui est $0^{fr.},22056$. On emploiera la multiplication abrégée; ainsi, pour terminer, on fera la multiplication ainsi posée :

$$\begin{array}{r} 0,220\ 56 \\ \underline{5\ 788,763} \end{array}$$

Combien payera-t-on au change des monnaies pour un vase d'or au titre de 0,840, *pesant* 348gr.,57 ?

Même marche; or pur, 0gr.,840×348,57 ; puis on multipliera le produit par 3fr.,43778 valeur de 1 gramme d'or pur au change des monnaies. On emploiera la multiplication abrégée. Voici la 2e multiplication posée :

$$\begin{array}{r} 3{,}473\ 78 \\ 8\ 897{,}292 \\ \hline \end{array}$$

RÈGLE DE MÉLANGE DIRECTE.

392. *On a mélangé* 84 *litres de vin à* 0fr.,50 *le litre ;* 108 *litres de vin à* 0fr.,50 ; 108 *litres à* 0fr.,70 ; 64 *litres à* 0fr.,65. *A combien revient le litre du mélange ?*

84 litr.	à 0fr.,50	coûtent	0fr.,50 × 84 =	42fr.,00
108 litr.	à 0fr.,70		0fr.,70 × 108 =	75fr.,60
64 litr.	à 0fr.,65		0fr.,65 × 64 =	41fr.,60
Les 256 litres		du mélange coûtent		159fr.,20

1 litre du mélange coûte $\dfrac{159^{fr.},20}{256}$

On évalue ce quotient à 1 centime près.

Le raisonnement conduit toujours à la règle pratique que voici :

RÈGLE. *Pour connaître le prix de l'unité d'un certain mélange, multipliez chaque nombre d'unités d'une espèce par le prix de l'unité de cette espèce ; faites la somme de toutes les valeurs ainsi obtenues, et divisez cette somme par le total des nombres d'unités de diverses espèces. Le quotient de cette division est le prix demandé.*

Un boulanger a acheté : 1° 24 hectolitres de blé à 25 fr. l'hectolitre ; 2° 30 hect. à 24fr.,50 ; 3° 42 hect. à 30 fr. ; 4° 40 hect. à 28fr.,50. Il fait verser tout ce blé en un seul tas, pour le consommer ainsi mélangé ; à combien lui revient l'hectolitre du mélange ?

24hectol. à 25fr.	coûtent	25fr.,00 × 24 =	600fr.
30hectol. à 26fr.,50		26fr.,50 × 30 =	795fr.
52hectol. à 30fr.,00		30fr.,00 × 42 =	1260fr.
40hectol. à 28fr.,50		28fr.,50 × 40 =	1140fr.
Les 136hectol.	mélangés ont coûté		3795fr.

$$1^{\text{hectol.}} \text{ du mélange coûte } \frac{3795^{\text{fr.}}}{136}$$

On évaluera ce quotient à 1 centime près.

Toutes les questions dites de mélange direct se résolvent ainsi.

Le prix de l'unité du mélange est ce qu'on nomme aussi le prix moyen de l'unité des matières mélangées. Nous reviendrons sur ce prix moyen.

Règle de mélange indirecte.

393. *Dans quelle proportion devra-t-on mélanger du vin à* 85 *centimes le litre, et du vin à* 65 *centimes pour avoir du vin qui revienne à* 72 *centimes le litre.*

Désignons par x et y les nombres de litres des deux espèces employées dans un même mélange quelconque ; il faut trouver le rapport de x à y ; on raisonne ainsi :

Pour chaque litre de vin à 85 centimes versé dans le mélange, il y aura perte de 85 — 72 ou 13 centimes ; pour les x litres de cette qualité, il y aura une perte de $13^{\text{cent.}} \times x$.

Pour chaque litre à 65 centimes, il y aura au contraire 7 centimes de bénéfice, et pour y litres, ce bénéfice se montera à $7 \times y$.

Il faut que le bénéfice compense la perte ; on doit donc avoir

$$13 \times x = 7 \times y,$$

d'où divisant de part et d'autre par 13, puis par y, on déduit

$$x : y = 7 : 13 \qquad (1).$$

Le nombre des litres à 85 centimes doit être au nombre de litres à 65 centimes dans le rapport de 7 à 13.

394. Problème. *On propose de remplir une pièce de* 300 *litres*

avec du vin à 85 *centimes le litre et du vin à* 65 *centimes, de telle sorte que le litre du mélange revienne à* 72 *centimes.*

On commence par se demander dans quelle proportion on devra mélanger les deux espèces de vin, pour que chaque litre du mélange revienne à 65 centimes le litre; ce qui est le problème précédent. Ayant trouvé $x : y = 7 : 13$, il ne reste plus qu'à partager 300 en parties proportionnelles à 7 et 13; ce que l'on sait faire; $x : 7 = y : 13$ donne $x+y : (7+13) = x : 7$; ou, $300 : 20 = x : 7$; d'où $x = \frac{300 \times 7}{20}$; on obtient de même y.

395. Si au lieu d'indiquer la totalité du nombre des litres du mélange, on fixait seulement le nombre des litres d'une espèce, par ex. : Si on voulait employer 120 litres de vin à 60 centimes, il suffirait de remplacer y par 120 dans le raisonnement qui précède, ou simplement dans l'égalité qui en résulte. L'égalité (1), devenue alors $x : 120 = 7 : 13$, donne la valeur de x, ou le nombre de litres à 85 centimes, qui doivent être ajoutés aux 120 litres à 65 centimes, pour que 1 litre du mélange revienne à 72 centimes le litre.

Quant il y a plus de deux prix différents pour les objets mélangés, le problème devient tout à fait indéterminé. On ne peut même pas fixer le rapport des nombres d'unités de diverses espèces considérées.

PROBLÈME. *On propose de mélanger du vin à* 85 *cent., à* 90 *cent. et à* 72 *cent., de manière que le litre du mélange revienne à* 82 *cent.*

Voici une des manières de parvenir au but indiqué.

Proposons-nous de mélanger du vin à 75 cent. et à 72 cent., de manière à produire du vin à 79 cent. (un prix intermédiaire). D'après le problème précédent, le mélange devra être fait dans la proportion de 7 litres de vin à 85 c. pour 6 litres de vin à 72 cent.

$7^{\text{litres}} + 6^{\text{litres}} = 13^{\text{litres}}$; voyons maintenant comment on fera un mélange de 13 litres de vin à 79 cent. avec du vin à 90 cent., pour obtenir du vin à 82 c. En désignant par x et y les nombres de litres à 79 et 90 cent., on trouve, par le raisonnement employé dans le précédent problème : $x : y = 8 : 3$. Mais $x = 13$, donc $13 : y = 8 : 3$, d'où $y = \frac{13 \times 3}{8} = \frac{39}{8} = 4^{\text{litres}}\ 7/8$. On peut

donc mélanger *dans la proportion* de 6 litres à 72 cent., 7 litres à 85 cent., et 4 litres 7/8 à 90.

Nous pourrions donner une méthode générale pour trouver ainsi autant de solutions qu'on voudrait de problèmes semblables; mais la grande indétermination ne laisse pas beaucoup d'intérêt à ces solutions particulières. D'ailleurs l'algèbre conduit facilement à toutes ces solutions.

RÈGLES D'ALLIAGE.

396. Tout ce qui vient d'être dit pour les mélanges s'applique exactement aux alliages ou mélanges de métaux.

42e PROBLÈME. *On a fondu ensemble trois lingots d'argent : le premier, au titre de* 0,887, *pèse* $2^k,826$; *le deuxième, au titre de* 0,920, *pèse* $1^k,812$; *le troisième, au titre de* 0,842, *pèse* $3^k,248$. *On demande le titre de l'alliage par rapport à l'argent.*

Ainsi que nous l'avons dit ailleurs, *le titre d'un alliage de métaux, par rapport à un de ces métaux, est le quotient du poids de ce métal par le poids total de l'alliage, ou bien c'est le poids de la quantité de ce métal existant dans une unité de poids de l'alliage.* Chacun des lingots ci-dessus est un alliage d'argent et de cuivre; le métal principal est l'argent. D'après l'énoncé et la définition précédente, chaque kilogramme du premier lingot contient $0^k,887$ d'argent pur; le lingot tout entier contiendra donc $0^k,887 \times 2,826$. On voit de même que le poids de l'argent pur contenu dans le deuxième lingot est égal à $0^k,920 \times 1,812$; enfin, pour le troisième, ce poids est égal à $0^k,842 \times 3,248$. De sorte que le nombre des kilogrammes d'argent pur contenus dans l'alliage des trois métaux est la somme $0,887 \times 2,826 + 0,920 \times 1,812 + 0,842 \times 3,248$. Désignons cette somme par s; le titre est le rapport entre ce poids s et le poids total de l'alliage. Or ce poids de l'alliage est la somme des poids des trois lingots; $2^k,826 + 1,^k812 + 3^k,248 = 7^k,886$. Effectuant la somme s et sa division par 7,886, on obtiendra le titre demandé; on évalue ordinairement ce titre en millièmes (*).

(*) C'est ici le cas d'appliquer ce qui a été dit n° 386 pour savoir à quelle approximation on connaît le titre cherché.

On trouve encore là une règle générale : *Pour avoir le titre d'un alliage de métaux on multiplie le poids de chaque lingot par son titre ; on additionne tous les produits et on divise le résultat de cette addition par la somme faite des poids des divers lingots. Le quotient, que l'on évalue ordinairement à un millième près, est le titre de l'alliage.*

43ᵉ PROBLÈME. *Dans quelle proportion faut-il allier de l'argent au titre de* 0,927 *et de l'argent au titre de* 8,865, *pour avoir un lingot au titre de* 0,890 ?

Désignons par x et y les deux nombres de kilogrammes que l'on prendra sur les lingots donnés pour composer le lingot demandé. Il faut trouver le rapport de x à y.

Chaque kilogramme d'argent au titre de 0,927 contient $0^k,927 - 0^k,890$, ou $0^k,037$ d'argent pur de plus qu'il ne lui en faut pour être au titre de 0,890 ; sur les x kilogrammes employés, il y a, en trop, $0,037 \times x$. A chaque kilo du deuxième lingot, il manque $0^k,025$ d'argent pur, pour être au titre de 0,890 ; aux y kilos employés, il manque $0^k,025 \times y$. Il est nécessaire que ce qu'un lingot a de trop compense ce qui manque à l'autre ; x et y doivent être tels que $0^k,037 \times x = 0^k,025 \times y$, c'est-à-dire que l'on ait :

$$x : y = 0,025 : 0,037, \text{ ou } x : y = 25 : 37 \ (1).$$

Si l'alliage doit peser un poids donné, $3^k,500$, par exemple, on aura l'égalité $x + y = 3,500$, et la dernière égalité (1) donnera $x + y : 25 + 37 = x : 25$, ou $3,500 : 62 = x : 25$.

Si l'on doit employer $2^k,325$ du premier lingot, on fera partout $x = 2^k,325$, et on aura $2,325 : y = 25 : 37$; d'où on déduit y.

L'or vert s'obtient en fondant 708 *parties d'or avec* 292 *parties d'argent ; combien vaut le gramme de cet alliage (sachant que* 5 *grammes d'argent valent* 1 *fr., et* 1 *gramme d'or,* $3^{fr.},1$?

Composons un alliage de 1000 grammes.

$708^{gr.}$ d'or	valent	$3^{fr.},1 \times 708 = 2194^{fr.},8$
$292^{gr.}$ d'argent		$0^{fr.},20 \times 292 = 58^{fr.},4$
Les $1000^{gr.}$ de l'alliage		$2253^{fr.},2$
$1^{gr.}$ *id.*	vaut	$2^{fr.},2532$

Moyennes arithmétiques; valeurs moyennes; prix moyen.

397. ***La moyenne arithmétique de plusieurs valeurs s'obtient en divisant la somme de ces valeurs par leur nombre.***

En mesurant une distance par des moyens approximatifs, on a trouvé en 5 fois, successivement : $2325^m,156$; $2324^m,876$; 2325,084; 2324,532; 2325,476. Trouver cette distance en prenant la moyenne de ces 5 résultats? En faisant la somme, puis en prenant la 5e partie, on trouve $2325^m,0248$.

On déduit facilement de la proposition démontrée n° 155, que la moyenne de plusieurs nombres est comprise entre le plus petit et le plus grand de ces nombres; en admettant donc que les plus grands résultats soient fautifs en plus, et les plus petits en moins, on est porté à choisir le résultat moyen comme approchant le plus de l'exactitude; tel est l'usage des moyennes.

Trois astronomes placés au même lieu observent l'instant où commence une éclipse. Le 1er trouve $4^h\ 27^m\ 43^s,5$; le 2e, $4^h\ 27^m\ 42^s,75$; le 3e, $4^h\ 27^m\ 42^s$; trouver l'heure moyenne. *Rép.* $4^h\ 27^m\ 42^s,75$.

C'est ainsi qu'on trouve la moyenne des températures aux diverses heures d'un jour, aux divers jours d'une année; la moyenne de toutes les hauteurs barométriques d'un jour, etc.

PRIX MOYEN. *Dans un marché, il a été vendu :* 1° 24 *hectolitres de blé à* 25 *fr. l'hectolitre;* 2° 30 *hectolitres à* 26 *fr.* 50 *c.;* 3° 42 *hectolitres à* 30 *fr.;* 4° 40 *hectolitres à* 28 *fr.* 50 *c. Trouver le prix moyen.*

LE PRIX MOYEN doit être tel qu'en le payant pour chacun des hectolitres de la totalité du blé vendu, on ait pour cette totalité le même argent que ces hectolitres ont réellement coûté d'après l'énoncé du problème.

On opère comme si on mélangeait tout le blé indiqué.

$24^{hectol.}$	à $25^{fr.}$	coûtent	$25^{fr.},00 \times 24 = 600^{fr.}$
$30^{hectol.}$	à $26^{fr.},50$		$26^{fr.},50 \times 30 = 795^{fr.}$
$42^{hectol.}$	à $30^{fr.},00$		$30^{fr.},00 \times 42 = 1260^{fr.}$
$40^{hectol.}$	à $28^{fr.},50$		$28^{fr.},50 \times 40 = 1140^{fr.}$
Les $136^{hectol.}$	vendus ont coûté		$3795^{fr.}$

En vendant *chaque* hectolitre 136 fois moins, c'est-à-dire $\frac{3795}{136}$, on aurait pour les 136 hectolitres la même somme 3795 fr. C'est absolument comme si on eût mélangé tous les hectolitres vendus. La règle à suivre est celle du n° 392. Cet exemple montre assez ce qu'il y a à faire pour trouver un prix moyen ou une valeur moyenne quelconque. Ex. : Le prix de l'unité d'un mélange ou alliage quelconque est un prix moyen.

C'est en tenant note des prix divers auxquels le blé est vendu sur un marché, et du nombre des mesures vendues à chaque prix, qu'on dresse la mercuriale du marché, qu'on établit le prix moyen régulateur de la taxe du pain. A Paris, c'est le prix moyen du quintal métrique de farine qui sert de base à cet effet.

Détail des ventes officielles du 11 août 1852 : Farine, 1re qualité, 390^{qtaux},93 kilog. à 35$^{fr.}$,05 ; 179^{qtaux},17 kilog. à 34$^{fr.}$,40 ; 76^{qtaux},93 kilog. à 32$^{fr.}$,80 ; 15^{qtaux},70 kilog à 32$^{fr.}$,50. On demande le prix moyen du quintal.

Cette question des moyennes, du prix moyen, se présente souvent. Il y a le *titre moyen* (on le trouve comme le titre d'un alliage) ; il y a le taux moyen des rentes, le cours moyen des fonds publics. Nous parlerons de ces deux dernières moyennes.

Partages proportionnels (Suite).

398. Ces partages ont lieu dans une foule d'occasions.

Ainsi l'actif d'une faillite se partage, tous frais de liquidation déduits, en parties proportionnelles aux sommes dues aux divers créanciers.

Le principal de la contribution foncière se partage entre les divers contribuables, proportionnellement à la valeur officielle de leurs propriétés foncières, etc., etc.

Quand le nombre des parties prenantes est assez considérable, il est mieux de ne pas suivre exactement la marche indiquée n° 334, mais plutôt celle-ci.

Pour une faillite, on additionnera toutes les dettes ; supposons qu'elles se montent à 495715 fr. ; c'est ce qu'on nomme le *passif* du failli. Cela posé, admettons que, tous frais de liquidation déduits, le failli possède 240000 fr. ; c'est son *actif*. Alors on raisonne ainsi : Si la créance appartenait à un seul individu, cet individu

toucherait tout l'actif ou 240,000 fr.; pour une créance de 495765 fr., on toucherait 240000 fr.; pour une créance de 1 fr., on devra donc toucher $\frac{495745}{240000}$; on calculera cette valeur avec un nombre plus ou moins grand de décimales, suivant l'importance des dettes, et on multipliera successivement ce quotient ainsi évalué par la valeur de chacune. De même pour les contributions; supposant qu'un seul contribuable possède toutes les propriétés de l'arrondissement, on lui assigne toute la contribution; on déduit de là qu'à 1 fr. de propriété foncière correspond une contribution égale au quotient de la contribution totale par la valeur totale des propriétés; ayant la cote qui correspond à 1 fr. de propriété, évaluée en décimales, avec une assez grande approximation, on en déduit les cotes de tous les contribuables par une série de multiplications. Au lieu de 1 fr. par quote-part, on peut choisir 100 fr.

On comprend que c'est ici le cas de faire la table des 9 multiples de cette cote élémentaire; aussi bien pour une faillite où il y aurait de nombreux créanciers. Il y a lieu aussi quelquefois de se servir des méthodes d'approximation.

399. *Un testateur laisse* 100000 *fr. à* 3 *neveux, qui ont respectivement* 30 *ans,* 25 *ans,* 20 *ans, à condition qu'ils auront davantage à proportion qu'ils seront moins âgés.*

Il résulte de cette disposition du testateur que le 1er neveu ne doit avoir que 1/30 de la part qu'aurait un neveu âgé d'un an; le 2e, 1/25 de cette part fictive, et le 3e, 1/20 de la même.

Les parts des 3 neveux sont donc respectivement proportionnelles à ces fractions $\frac{1}{30}, \frac{1}{25}, \frac{1}{20}$.

On réduira ces fracteurs au même dénomihateur 300, et on sera conduit à partager 100000 en parties proportionnelles aux nombres 10, 12 et 15 (*V.* n° 335).

400. *Partager une somme de* 1800 *fr. entre* 4 *personnes, de manière que la part de la* 1re *soit les* 3/4 *de celle de la* 2e*; la part de la* 3e *les* $\frac{4}{5}$ *de celle de la* 2e*; et celle de la* 4e*, les* $\frac{11}{9}$ *de la part de la* 3e.

On voit quelle est la part le plus souvent mentionnée dans

l'énoncé, et l'on tâche d'établir le rapport de chacune des autres parts à celle-là.

Soient x, y, z, t les 4 parts dans l'ordre de leurs numéros ci-dessus. D'après l'énoncé

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{4}\ (1);\quad \frac{z}{y}=\frac{4}{5}\ (2);\quad \frac{t}{z}=\frac{11}{9}\ (3).$$

La part de la 2e personne est mentionnée 2 fois ; nous allons lui rapporter chacune des autres ; c'est déjà fait pour la 1re et la 3e. Multiplions les égalités (2) et (3) ; z s'en ira du produit par réduction ; il vient $\frac{t}{y}=\frac{44}{45}$.

Nous pouvons maintenant écrire ces quatre égalités :

$$x=\frac{3}{4}\times 7;\quad y=1\times y;\quad z=\frac{4}{5}\times y;\quad t=\frac{44}{45}y.$$

Les 4 parts sont évidemment proportionnelles aux nombres qui multiplient y. On partagera 1800 fr. en parties proportionnelles à ces 4 nombres (335).

Intérêts et escomptes.

401. En revenant sur ce sujet, nous avons pour but de faire connaître les principales simplifications apportées aux calculs d'intérêts dans les maisons de banque et de commerce où on en fait continuellement. En indiquant ces principales simplifications, nous tâcherons de donner des idées générales qui puissent en faire trouver d'autres ; d'ailleurs l'habitude fait beaucoup en pareille matière, comme dans tous les calculs possibles.

Remarque. Escompter un billet, c'est prendre les intérêts de la valeur portée sur ce billet pour le temps qui reste à s'écouler jusqu'à l'échéance.

Tout ce que nous allons dire des intérêts s'applique littéralement à l'escompte commercial ; nous emploierons l'un ou l'autre de ces mots indifféremment.

Intérêts pour une ou plusieurs années. On calcule l'intérêt pour une année, et on le multiplie par le nombre des années.

Intérêts pour 1 an. Nous avons déjà donné cette règle : on mul-

tiplie le capital par le taux ; puis, à l'aide de la virgule décimale, on divise le produit par 100.

Cette règle résulte de la formule $I = \frac{a\,i\,t}{100}$ quand on y fait $t = 1$; $I = \frac{a \times i}{100}$ (1).

Ce calcul qui paraît bien simple peut être encore simplifié dans plusieurs cas.

L'intérêt est de 5 p. 0/0 ; $i = 5$ donne $I = \frac{a \times 5}{100} = \frac{a}{20} = \frac{a}{2} : 10.$

De là cette règle :

On trouve l'intérêt d'un capital à 5 p. 0/0 en prenant la moitié de ce capital, et séparant au quotient une décimale de plus qu'il n'y en a dans le capital.

Ex. :	Capital	3842,20
	intérêt à 5 p. 0/0	192,11

Si l'intérêt à 5 p. 0/0 est demandé pour un nombre pair d'années $2n$, on a $I = \frac{a \times 2n}{20} = \frac{a}{10} \times n$.

On a cet intérêt en multipliant le capital par la moitié du nombre des années, et séparant au produit une décimale de plus qu'il n'y en a déjà.

L'intérêt à 1 p. 0/0 est le capital dans lequel on a séparé 2 chiffres décimaux à droite, ou reculé la virgule de deux places vers la gauche.

L'intérêt à $\frac{1}{2}$ p. 0/0 est la moitié du capital dans lequel on a séparé 2 décimales de plus que dans le capital.

Cela posé, voici des calculs d'intérêts pour un an, aux taux les plus usités.

Capital 3842,20.

Intérêt à 6 p. 0/0.	5 p. 0/0	192,11
	1 p. 0/0	38,422
	(Total)	230,532

Intérêt à 5 $^1/_2$ p. 0/0.	5 p. 0/0	192,11
	1/2 p. 0/0	19,211
	(Total)	211,321

Intérêt à 5 $^3/_4$ p. 0/0.	5 p. 0/0	192,11
	1/2 p. 0/0	19,211
	1/4 p. 0/0	9,655
	(Total)	220,976

Intérêt à 4 $^1/_2$ p. 0/0.	5 p. 0/0	192,11
	1/2 p. 0/0	19,211
	(Reste)	172,90

Intérêt à 4 $^3/_4$ p. 0/0.	5 p. 0/0	192,11	
	1/4 p. 0/0	9,65	(*).
	(Reste)	182,46	

Intérêt à 6 $^1/_3$ p. 0/0.	5 p. 0/0	192,11
	1 p. 0/0	38,422
	1/3 p. 0/0	12,807
	(Total)	243,34

Dans ces calculs, on emploie beaucoup la méthode des parties aliquotes.

Intérêt à 3 $^3/_4$ p. 0/0.	3 p. 0/0	115,266
	3/4 p. 0/0	28,422
	(Total)	143,68

$^1/_4$ est le $^1/_4$ de 3.

Intérêt à 3 $^1/_2$ p. 0/0.	3 p. 0/0	115,266
	1/2 p. 0/0	19,211
	(Total)	134,477

Intérêt à 2 $^1/_2$ p. 0/0. 96,054

$\frac{a \times 2\,^1/_2}{100} = \frac{a}{40} = \frac{a}{4} : 10$; nous avons pris le 1/4 du capital,

(*) On remarquera que l'intérêt de 1/4 pour 0/0 est la moitié de celui de 5 pour 0/0 dans lequel la virgule décimale serait reculée d'une place vers la gauche.

et séparé dans le résultat une décimale de plus qu'il n'y en a dans le capital.

Intérêt à 2 3/4 p. 0/0.	2 1/2 p. 0/0	96,054
	1/4 p. 0/0	9,605
	(Total)	102,659

1/4 est le 1/10 de 2 1/2.

Intérêt à 2 1/4 p. 0/0.	2 1/2 p. 0/0	96,054
	1/4 p. 0/0	9,605
	(Reste)	86,449

Nous n'avons pas besoin de parler des intérêts à 1 1/2, 1 3/4; on les obtient par une addition bien simple.

Intérêts pour un nombre d'années et de mois, sans jours.

On emploie généralement la méthode des parties aliquotes.

Ex. : Trouver l'intérêt de 3842,20 à 4 1/2 p. 0/0, pendant 7 ans 10 mois. Voici le calcul :

Capital 3842,20 (*intérêts à* 4 1/2 *pour* 100).

Intérêts pour 1 an	5 p. 0/0	192,11	
	1/2 p. 0/0	19,211	
		172,899	(Reste).
Intérêts pour 6 ans		1037,394	
6 mois.		86,449	
4 mois.		57,633	
Intérêts pour 7 ans 10 mois.		1354,385	

Si on avait eu 11 mois, on eût décomposé en 6 mois, 3 mois et 2 mois. Si on avait à la fois 2 ans et 8 mois dans un calcul, on aurait pour 8 mois le tiers de l'intérêt de 2 ans.

Si on considère en particulier le taux commercial de 6 pour 0/0 par an, on observe que cela fait 1/2 pour 0/0 pour 1 mois, 1/4 pour 0/0 pour 15 jours, 1 p. 0/0 pour 2 mois ou 60 jours; 0,1 p. 0/0 pour 6 jours. On peut profiter comme il suit de ces remarques.

Trouver l'intérêt de 3842fr.,20, à 6 pour 0/0, pour 38 jours.

Pour 30 jours	19fr.,211
Pour 6 jours	3fr.,842
Pour 2 jours	1fr.,28
Total.	24fr.,33

Voici un dernier exemple des calculs d'intérêts par la méthode des parties aliquotes.

Trouver les intérêts de fr. 3842,20 à 6 pour 0/0 pour 3 ans, 8 mois, 24 jours.

Intérêts p. 1 an	5 p. 0/0	192,11
	1 p. 0/0	38,42
		230,53 (Total).
Intérêts p. 3 ans		691,59
2 mois		38,42
6 mois		115,26
6 jours.		3,842 (0,1 p. %)
18 jours.		11,526
Intérêts p. 3 ans 8 mois 24 jours.		860,64

On aurait l'intérêt à 3 pour 0/0 pour un temps quelconque, en calculant l'intérêt à 6 pour 0/0 et prenant la moitié du résultat.

Méthode des NOMBRES *et des* DIVISEURS.

402. Le plus souvent dans la pratique l'intérêt ou l'escompte se prend pour un temps moindre qu'une année. Le billet est à tant de mois, tant de jours, tant de mois et de jours d'échéance. Dans ce cas, la loi veut que chaque mois soit compté non pas uniformément pour 30 jours, mais pour le nombre de jours que lui assigne le calendrier grégorien.

La longueur du mois étant variable, ne peut plus, dans aucun cas, être prise pour unité de temps; l'unité naturelle est le jour.

Dans l'évaluation du nombre des jours compris entre deux dates, on compte le jour où se fait l'opération; mais on ne compte pas le jour de l'échéance.

Cela posé, soit a le capital, n le nombre de jours pour lequel on

prend l'intérêt ou l'escompte de a, i' l'intérêt de 1 franc pour 1 jour.

1 fr. rapporte i' fr. en 1 jour; a fr. rap. $a \times i'$ fr. en 1 jour; et $a \times i' \times n$ fr. en n jours. $\quad I = a \times n \times i' \quad$ (1).

Dans chaque question, le capital a est connu; le nombre de jours, n, s'évalue par une addition comme il a été indiqué n° 330, ou mieux, à l'aide de la table ci-après; i' doit se déduire du taux, i pour 0/0 par an.

Bien que l'on compte tous les jours bien exactement, on n'en a pas moins continué chez les banquiers à prendre pour intérêt de 1 fr., pour, 1j, la 360e partie de son intérêt pour 1 an; et cela uniquement parce que le nombre 360, qui a beaucoup de diviseurs, est beaucoup plus commode que le nombre 365 qui n'en a que deux, 5 et 73.

Cela posé, si i désigne le taux de l'intérêt ou de l'escompte (n° 323), nous pourrons dire :

100fr. en	360 jours	rapportent	i fr.
100fr. en	1 jour	rapp.	$\dfrac{i}{360}$
1fr. en	1 jour	rapp.	$\dfrac{i}{36000} = i'$.

Si on remplace successivement dans cette dernière égalité i par les taux les plus usités,

1, 2, 3, 4, 4 ½, 5, 6, 8, 9, 10, 12 pour 0/0,

on trouve, en réduisant chaque fraction à sa plus simple expression, les valeurs correspondantes de i' :

$$\frac{1}{36000},\ \frac{1}{18000},\ \frac{1}{12000},\ \frac{1}{9000},\ \frac{1}{8000},\ \frac{1}{7200},\ \frac{1}{6000},$$
$$\frac{1}{4500},\ \frac{1}{4000}\ \frac{1}{3600},\ \frac{1}{3000}.$$

De sorte qu'à ces mêmes taux correspondent les valeurs suivantes de l'intérêt ou escompte, I, égalité (1) :

Taux.	1,	2,	3,	4,	4 ½,	5.
Intérêts. (Diviseurs.)	$\dfrac{a \times n}{36000}$,	$\dfrac{a \times n}{18000}$,	$\dfrac{a \times n}{12000}$,	$\dfrac{a \times n}{9000}$,	$\dfrac{a \times n}{8000}$,	$\dfrac{a \times n}{7200}$.

Taux.	6,	8,	9,	10,	12
Intérêts. . (Diviseurs.)	$\frac{a \times n}{6000}$,	$\frac{a \times n}{4500}$,	$\frac{a \times n}{4000}$,	$\frac{a \times n}{3600}$,	$\frac{a \times n}{3000}$.

A chaque taux correspond un *diviseur* du produit $a \times n$, qui dépend de ce taux et ne dépend que de lui.

Ceux qui font habituellement des calculs d'escompte ou d'intérêts savent ces *diviseurs* par cœur ; dans tous les cas, on en peut faire une table dont la composition est visible dans ce qui précède.

PROBLÈME. *On escompte, le* 11 *mai* 1853, *à* 4 *p.* 0/0 *un billet de* 3240$^{\text{fr.}}$, *payable le* 25 *décembre même année ; quel est l'escompte ?*

$$a = 3240;\ n = (20 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 24) = 227.$$

$$a \times n = 3240 \times 227; \quad \text{le } \textit{diviseur} \text{ est } 9000.$$

$$I = \frac{3240 \times 227}{9000} = \frac{360 \times 227}{1000} = 81^{\text{fr.}},720.$$

RÈGLE GÉNÉRALE. *Pour calculer l'intérêt ou l'escompte d'un capital, on multiplie le capital par le nombre de jours, et on divise le produit par le* DIVISEUR CORRESPONDANT *au taux donné.*

Le produit $a \times n$ du capital par le nombre des jours s'appelle le NOMBRE. Cette dénomination, que nous n'avons pas à expliquer, est usitée chez les banquiers.

Mais l'usage des NOMBRES et des DIVISEURS fixes susdits est principalement avantageux dans le cas fréquent où un banquier ou un négociant doit faire un compte d'intérêts ou d'escompte en plusieurs articles pour la même personne.

Le taux de l'intérêt peut varier avec l'époque et avec les circonstances de l'opération ; mais il est le même à une même époque pour le plus grand nombre des transactions ; alors l'emploi de la formule $I = \frac{a \times n}{D}$ présente une simplification notable due à ce que tous les NOMBRES ont le même DIVISEUR.

Ex. : Le 6 mars 1853, Pierre fait escompter à Paul les effets suivants au taux de 6 p. 100.

500$^{\text{fr.}}$	Paris	25 juin.
1200	»	15 avril.
950	»	25 mai.
1325,30	»	20 avril.

Voici le compte :

Paris, 6 mars.

Capitaux			Jours	Nombres.
1200	Paris	15 avril	40	48000
1325,30	»	20 avril	45	59638,5
950 »	»	25 mai	80	76000
500 »	»	25 juin	111	55500
3975,30				239138,8
39,85				
3935,45 (à payer.)				

$$\frac{239138}{6000} = \frac{239,138}{6} = 39,85 \text{ (escompte).}$$

La méthode est simple : *pour trouver l'escompte total, on compte les jours pour chaque effet; on en déduit le* NOMBRE *relatif à cet effet; on ajoute tous les nombres trouvés, et on divise la somme par le diviseur correspondant au taux donné.*

$$\left(\frac{a \times n + a' \times n' + a'' \times n'' + a''' \times n'''}{D}\right)$$

En faisant le compte, on range les effets par ordre d'échéances à partir de la plus prochaine; de cette manière, ayant trouvé 40 jours pour le premier effet, on en déduit facilement le nombre de jours suivant, 45, etc. (V. d'ailleurs la table ci-après).

L'emploi des nombres est encore avantageux quand il y a un compte à balancer entre deux banquiers ou deux négociants.

Pierre doit à Paul			Jours.	Nombres.
2000fr.	payables	5 juin	117	234000
3000	*id.*	5 juillet	87	261000
1000	*id.*	20 juillet	72	72000
5000	*id.*	20 sept.	10	50000
A = 11000				617000
Paul doit à Pierre				
1500fr.	payables	10 juin	112	168000
4000	*id.*	20 juin	102	408000
5000, 20	*id.*	25 août	36	180007,20
3000	*id.*	15 sept.	15	45000
A' = 13500, 20				801007,20

Faire la balance au 30 septembre, le taux étant 4 p. 100.

A est la somme des premiers effets susdits; A' la somme des derniers; I l'intérêt qui sera dû le 30 septembre à Paul; I' celui qui sera dû à Pierre à la même époque.

Au 30 septembre, Pierre devra à Paul A + I, Paul devra à Pierre A' + I'.

On connaît les sommes A et A' des effets susdits; au 30 sept., Paul devra à Pierre $A' - A + I' - I = 2500,20 + I' - I$.

Or $I' - I$ s'obtient au moyen des *nombres* relatifs aux divers effets; on fait la somme des *nombres* des effets dus par Pierre, soit S; *pour les effets* dus par Paul, soit S'; le diviseur fixe est 9000. Évidemment $I' - I = \frac{S' - S}{9000}$. Mais $S' = 801007,20$; $S = 617000$; $S' - S = 184007,20$; $I' - I = \frac{184007,20}{9000} = 20^{fr.},445$. Paul redevra $2502^{fr.}645$. Si la balance devait se faire à une époque antérieure aux dernières échéances, par exemple, à la date du 8 mai; Paul devra à Pierre l'escompte des effets de Pierre du 8 mai aux diverses échéances des billets de Pierre, ou I; l'avoir de Pierre sera donc A' + I; Pierre devra à Paul l'escompte des effets dus par Paul, calculé à partir du 8 mai, c'est-à-dire I'; l'avoir de Paul sera donc A + I', et le reliquat dû par Paul à Pierre sera $A' - A + I - I' = 2500,20 + I - I'$. On calculera $I - I'$ comme il a été indiqué.

403. On a dressé une table des jours compris entre deux dates; elle est d'un usage facile et commode pour le calcul des intérêts. Nous la donnons ici; en voici l'usage :

1er *Ex. : Soit à trouver le nombre de jours qu'il y a du 30 mai au 30 septembre.*

Suivez la colonne horizontale intitulée MAI jusqu'à la colonne verticale intitulée SEPTEMBRE. Le nombre 123 qui se trouve à cette rencontre est le nombre de jours demandé.

2e *Ex. : Combien de jours du 5 juin au 30 septembre.*

On cherche la rencontre de la colonne horizontale, *juin*, et de la colonne verticale, *septembre*; à cette rencontre on trouve 92 (c'est le nombre de jours du 5 juin au 5 septembre); on y ajoute 25 jours pour aller du 5 au 30 septembre.

3e *Ex. ; Combien de jours du 30 septembre 1852 au 12 mai 1853,*

TABLEAU DONNANT LES JOURS COMPRIS ENTRE DEUX DATES.

(*Année suivante.*)

	Février.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septembre.	Octobre.	Novembre.	Décembre.	Janvier.	Février.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septembre.	Octobre.	Novembre.	Décembre.
Du... janvier au	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334	365											
Février		28	59	89	120	150	181	212	242	273	303	334	365										
Mars			31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	337	365									
Avril				30	61	91	122	153	183	214	244	275	306	334	365								
Mai					31	61	92	123	153	184	214	245	276	304	335	365							
Juin						30	61	92	122	153	183	214	245	273	304	334	365						
Juillet							31	62	92	123	153	184	215	243	274	304	335	365					
Août								31	61	92	122	153	184	212	243	273	304	334	365				
Septembre									30	61	91	122	153	181	212	242	273	303	334	365			
Octobre										31	61	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365		
Novembre											30	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	
Décembre												31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

Cherchez la rencontre de la colonne horizontale *septembre* avec la colonne verticale *mai* (année suivante); on y trouve 242 (c'est le nombre de jours du 30 septembre au 31 mai); il faut retrancher 19 jours pour revenir du 31 mai au 12 mai; on a ainsi 223 jours.

Échéance moyenne.

404. Il arrive quelquefois qu'au lieu de faire escompter ou de négocier des effets, on les échange contre un effet unique créé tout exprès pour la négociation; il y a lieu dans ce cas au calcul de l'*échéance moyenne.*

Ex. : *Bance remet à Dubreuil, le* 15 *mars, les effets suivants :*

f. 1088	Paris	10 avril
800	»	25 dito
1000	»	5 mai
400	»	15 dito
1200	»	31 »

et lui demande en échange un effet unique à ÉCHÉANCE MOYENNE, c'est-à-dire, intermédiaire entre les échéances susdites, eu égard au montant respectif et à l'échéance de chacun des effets de Bance.

L'effet demandé doit être tel que si, à une époque quelconque, Bance veut faire de l'argent en le faisant escompter, il touche dans cette négociation exactement la même somme que si le même jour et au même taux il eût fait escompter à la fois tous les effets donnés par lui en échange.

RÈGLE. *On prend une date quelconque; le plus simple est de prendre la plus prochaine des échéances données* (10 *avril*, etc.) *On calcule les* nombres *des effets à échanger supposés escomptés tous à la fois le jour choisi; on divise la somme des* NOMBRES *par la somme des valeurs nominales des effets échangés; en ajoutant à la date de l'escompte fictif, au* 10 *avril par ex. : un nombre de jours marqué par le quotient, on trouve l'échéance moyenne cherchée; Dubreuil donne à Bance, en échange de ses effets, un effet unique payable à cette échéance moyenne, et ayant pour valeur nominale la somme des valeurs nominales des effets de Bance.*

Voici le calcul :

Paris, le 10 avril.

		Jours.	Nombres.
1088	10 avril	0	0
800	25 »	15	12000
1000	5 mai	25	25000
400	15 »	35	14000
1200	31 »	51	61200
4488			112200

112200	4488
22440	25
0000	

L'échéance moyenne est 25 jours après le 10 avril, c'est-à-dire le 5 mai; Dubreuil donnera à Bance un effet de 4488 fr. payable le 5 mai. La justification de ce calcul est très-simple; supposons d'abord que tous les effets de Bance d'une part, et l'effet unique d'une autre, soient escomptés à la date choisie, 10 avril.

Le porteur des quatre effets de Bance recevra évidemment $4488 - \frac{112200}{D}$; (D diviseur correspondant au taux) ; le porteur de l'effet unique recevra

$$4488 - \frac{4488 \times 25}{D} = 4488 - \frac{112200}{D},$$

exactement la même somme que l'autre.

Supposons maintenant que l'escompte ait lieu à une époque quelconque antérieure au 10 avril, 8^j avant, par ex. : Le nombre de chacun des effets de Bance sera augmenté du produit de sa valeur nominale par 8, et l'augmentation totale de l'escompte perçu sur ces effets sera

$$\frac{(1088 + 800 + 1000 + 400 + 1200)\, 8}{D} = \frac{4488 \times 8}{D} \ (^*).$$

L'augmentation de l'effet unique sera également : $4088 \times 8 : D$;

(*) On voit ici comment un compte d'intérêt étant fait par une date, on en déduit le montant des intérêts des mêmes effets par une autre date antérieure ou postérieure.

les deux escomptes, augmentés du même nombre, restent égaux. Le 2 avril les deux porteurs susdits recevront la même somme, en faisant escompter leurs effets.

Si on choisissait une échéance postérieure au 10 avril, les sommes reçue par les deux porteurs susdits diminueraient de la même valeur.

Il résulte de là que si, au lieu de prendre pour le calcul l'échéance fictive du 10 avril, on eût pris celle du 2 avril, on eût trouvé le quotient 25 + 8 ; 33 jours après le 2 avril, ce sera le 5 mai. Notre règle est donc exacte.

Le calcul de l'*échéance moyenne* est souvent pratiqué dans les bureaux pour ramener à une seule échéance plusieurs effets ayant des échéances différentes.

Des rentes sur l'État.

405. Les gouvernements comme les particuliers peuvent avoir besoin d'emprunter ; pour les uns comme pour les autres, les conditions de l'emprunt sont plus ou moins avantageuses, suivant la confiance qu'ils inspirent.

Le crédit public est la confiance qu'inspire un gouvernement par ses institutions, par les ressources de l'industrie et des terres du peuple qu'il régit, ressources sur lesquelles se prélève l'impôt annuel

La France, sous ce rapport, jouit d'un grand crédit public; par ses institutions, sa situation financière ne peut être cachée; la loi qui règle l'impôt doit être votée chaque année par le corps législatif.

Cette loi, qu'on nomme le budget, est divisée en deux parties : le budget des *Recettes* (détail des impôts à percevoir) ; le budget des *Dépenses* (détail de l'emploi des recettes). Le budget des dépenses se monte maintenant à 1500 millions (*).

La première dépense qui figure au budget est la dette de l'état. Le payement de cette dette s'élève annuellement à près de 400 millions, dont 211 millions servent à payer la rente ou les intérêts des emprunts faits par la France (**).

(*) Celui de 1852 est de 1503398346 fr.

(**) En 1852, la dette publique figure au budget pour 394363453 fr.

Il y a aujourd'hui 3 sortes de rentes sur l'État ; le 4 1/2 p. 0/0 ; le 4 p. 0/0 et le 3 p. 0/0 ; il n'y a que 27 millions de rente 4 p. 100

Le 4 1/2 p. 0/0 est l'ancien 5 p. 0/0 converti en 4 1/2 par un décret du 14 mars 1852. Le 3 p. 0/0 provient d'une opération financière faite par le gouvernement en 1825 pour donner une indemnité aux émigrés.

Du mode des emprunts publics.

Les gouvernements n'empruntent pas comme les particuliers ; ceux-ci empruntent un capital déterminé et payent un taux d'intérêts plus ou moins élevé. Les gouvernements au contraire constituent une rente fixe qu'ils vendent contre un capital indéterminé, calculé d'après la rente, mais qui, pour une quantité déterminée de rente, pour 4fr.,50 de rente, par exemple : varie avec la confiance qu'ils inspirent aux prêteurs, ou acheteurs de rente.

Quand le gouvernement émet des rentes pour un emprunt, il s'établit une concurrence entre ceux qui veulent acheter, Français ou étrangers. Il se forme des compagnies de banquiers ou de capitalistes qui font leurs soumissions à un certain prix. Ces soumissions sont cachetées ; au jour fixé, on en fait l'ouverture en séance publique, et la rente est vendue en totalité à la compagnie qui a offert le prix le plus élevé d'une quantité déterminée de rente, de 4 fr. 50 de rente, par exemple ; ce prix ne doit pas être inférieur à un minimum fixé à l'avance par le gouvernement.

La compagnie qui a acheté la rente la porte à la Bourse par petites parties, suivant ses convenances, ou la répartit entre des souscripteurs qui se sont engagés vis-à-vis d'elle à contribuer à la formation du capital donné en échange de la rente. L'emprunt se classe, et bientôt ces rentes font partie des masses de rentes sur l'État qui sont entre les mains d'un très-grand nombre de Français et d'étrangers.

Une quantité de rentes entre les mains d'un particulier est un revenu dont il jouit, et en même temps une valeur mobilière, une marchandise dont il peut faire de l'argent quand il veut.

Il remet sa rente à un agent de change, qui la vend à la Bourse suivant le cours du jour ; il se passe entre l'agent de change

du vendeur et ceux des acheteurs, exactement ce qui s'est passé déjà entre le gouvernement et les compagnies susdites.

Le vendeur tient la place du gouvernement, et tire de chaque quotité fixe de rente un prix plus ou moins élevé, dépendant de la confiance que celui-ci inspire.

COURS DE LA BOURSE DE PARIS.

MERCREDI, 15 *Septembre* 1852.

FONDS PUBLICS.	PRIX AU COMPT.	A TERME.	1er Crs	Plus haut	Pl.bas	Dernier.
FRANCE. 3 0/0, j. 22 j. juin.	77f 76f. 95 77f. 15	liquid.				
	10 15	fin cour.	77 20	77 60	77 20	77 60
		p. fin cour			77 70	78 d50
4 0/0, jouiss. du 22 sept.		p fin pr.		78 50 d1		
4 1/2 0/0 de 1825, j. 22 sept						
4 1/2 0/0 de 1852, j. 22 sept	103 50 55 60 65	liquid.				
non remboursable	70 75 80	fin cour.	103 80	104 20	103 75	104 20
pendant 10 ans.		p fin cour			104 60	104 80d50

Si nous jetons les yeux sur la cote officielle ci-dessus de la Bourse de Paris, nous y voyons d'abord les 3 espèces de rentes françaises déjà indiquées : 3 p. 0/0, 4 p. 0/0, 4 $^1/_2$ p. 0/0 ; chaque nom correspondant à la quantité de la rente considérée pour laquelle le gouvernement, s il remboursait le capital, donnerait 100 fr.

Ces mots : j. 22 juin, jouiss. du 22 sept., lisez jouissance du 22 juin, idem du 22 septembre, signifient que celui qui a acheté de la rente le 15 septembre jouira des intérêts échus de la rente 3 p. 0/0 à partir du 22 juin 1852, et pour les autres fonds, à partir du 21 septembre 1852 ; on conçoit que la valeur des arrérages à percevoir influe sur le prix de la rente.

La rente ou intérêt du 4 ou du 4 $^1/_2$ se paye moitié le 22 septembre, moitié le 22 mars ; la rente du 3 p. 0/0 se paie moitié le 22 juin, moitié le 22 décembre.

Le rentier qui possède du 3 et du 4 $^1/_2$ touche donc de l'argent tous les 3 mois.

Un certain nombre de jours avant le 22 septembre, vers le 6 septembre, par ex. : on détache le *coupon*, c'est-à-dire, que du 6 au 22 septembre ce n'est pas l'acheteur, mais bien le vendeur de la rente qui touche le coupon d'intérêts de 6^{m}, du 20 mars au 22 sep-

tembre; en même temps, sur la cote, on remplace ces mots, jouissance du 22 mars, par ceux-ci, jouissance du 22 septembre; de même quelques jours avant le 22 mars pour le 4 et le 4 $^1/_2$, et avant le 22 juin ou 22 décembre, pour le 3.

En continuant d'étudier le bulletin ci-dessus, on voit que les rentes susdites se vendent de trois manières : au comptant, payable fin courant, c'est-à-dire à la fin du mois courant, et à prime.

On ne crie à la bourse que le prix du comptant, le seul reconnu par la loi; c'est aussi le seul dont nous nous occuperons.

406. PROBLÈME. *Le prix du* 3 *p.* 0/0 *a varié le* 15 *septembre* 1852 *de cette manière :* 77 fr.; 76$^{fr.}$,95; 77$^{fr.}$,15; 77$^{fr.}$,10. *Quel est le prix moyen?*

On fait la somme des 4 prix et on divise par 4. Rép. 77$^{fr.}$,05.

Prix du 4 $^1/_2$ (1852), 103$^{fr.}$,50; 55; 60, 65, 70, 75, 80; lisez 103$^{fr.}$,50; 103$^{fr.}$,55; 103$^{fr.}$,60, etc. *Trouver le cours moyen du jour.* Rép. 103$^{fr.}$,65.

Pour calculer ces moyennes, on prend un nombre égal au plus petit cours, ex. : 103$^{fr.}$,50; puis on additionne tous les excédants des autres cours sur celui-là (5$^{c.}$ + 10$^{c.}$ + 15$^{c.}$, etc.). La somme des divers cours du 4 1/2 est 103$^{fr.}$,50 × 7 + 1$^{fr.}$,05; on divise par 7.

Un particulier ne peut acheter ou vendre de la rente que par l'intermédiaire d'un agent de change qui lui prend un courtage de 1/8 p. 0/0 du prix de la rente achetée ou vendue.

PROBLÈME. *Un particulier a donné l'ordre à son agent de change de lui acheter au comptant* 480 *fr. de rente, en* 3 *p.* 0/0, *et* 1800 *fr., en* 4 $^1/_2$ *p.* 100; *établir le bordereau de l'agent de change, c'est-à-dire, la somme à payer par ce particulier, sachant que chaque rente a été achetée au prix moyen du jour, le* 15 *septembre* 1852.

La rente 3 p. 0/0 est à 77$^{fr.}$,05; cela veut dire que pour chaque titre de 3 fr. de rente, l'agent de change devra donner 77$^{fr.}$,05. Cela fait pour

$$1 \text{ fr. de rente, } \frac{77^{fr.},05}{3}, \text{ et ponr } 840 \text{ fr., } \frac{77^{fr.},05 \times 840}{3} =$$

$$= 77^{fr.},05 \times 280 = 21574 \text{ fr.}$$

De même pour 4$^{fr.}$,50 de rente (4 $^1/_2$), il devra donner 103$^{fr.}$,65;

pour 1 fr., $103^{fr.},65 : 4^{fr.},50$; et pour 1800 fr. de rente en 4 $^1/_2$, il donnera $\frac{103^{fr.},65 \times 1800}{4,50} = 10365 \times 4 = 41460$.

Il dressera donc son bordereau ainsi :

840 fr. de rente, 3 p. 0/0,	à 77,05. .		21574
1800 fr. de rente, 4 1/2,	à 103,65. .		41460
			63054
		Courtage. . . .	78,79
			63112,79

Le particulier donnera $63112^{fr.},80$ en échange des titres de rente.

Combien, pour une somme de 36000 *fr., a-t-on pu avoir de rente* 3 *p.* 0/0 *le* 15 *septembre* 1852? *Combien de* 4 $^1/_2$ *(aux cours moyens du jour?*

1° Si l'acquéreur paye le courtage à part, il aura en 3 p. 0/0, évidemment autant de fois 3 fr. de rente que 36000 fr. contient $77^{fr.},05$; il aura $\frac{3^{fr.} \times 36000}{77,05}$; de même, en 4 $^1/_2$, il aurait :

$$\frac{4^{fr.},50 \times 36000}{103,65}.$$

2° Le courtage de l'agent de change doit faire partie des 36000 fr. Soit A la somme nette que l'agent donnera pour la rente :

$$36000 = A + 1/800 \quad \text{de} \quad A = A(1 + 1/800) = A\left(\frac{801}{800}\right);$$

d'où $A = \frac{36000 \times 800}{801}$; A étant connu, on fera comme tout à l'heure avec 36000 fr.

Un particulier a acheté à diverses époques : 1° 380 fr. de rente 3 p. 0/0 au cours de $75^{fr.},50$; 450 fr. même fonds, au cours de $74^{fr.},80$; et 820 fr., même fonds, à $80^{fr.},30$; aurait-il eu avantage à vendre ses rentes le 15 septembre 1852.

Pour répondre à cette question, il faut évidemment chercher

le prix moyen de 3 fr. de rente aux cours susdits, et le comparer au cours moyen du 15 septembre, c'est-à-dire à 77fr.,05.

Le particulier perdra ou gagnera, suivant que ce prix moyen sera plus fort ou plus faible que 77fr.,05.

$380 + 450 + 820 = 1650$ fr. de rente 3 p. 0/0 ont coûté aux cours indiqués

$$\frac{75,50 \times 380 + 74,80 \times 450 + 80,30 \times 820}{3} = a.$$

Le prix moyen cherché de 1 fr. de rente est $a : 1650$, et celui de 3 fr. de rente :

$$\frac{(a \times 3)}{1650} = \frac{75,50 \times 380 + 74,80 \times 450 + 80,30 \times 820}{1650}.$$

Le calcul fait, on compare ce prix à 77fr.,05.

On fait quelquefois des arbitrages entre les deux fonds principaux, le 3 p. 0/0 et le 4 $^1/_2$; c'est-à-dire qu'on vend de l'un pour acheter de l'autre, suivant l'avantage qu'on y trouve.

L'arbitrage se décide d'après certaines considérations de natures diverses; n'ayons égard qu'à la plus évidente, la somme à donner pour se faire un même revenu déterminé, en achetant du 3 p. 0/0 u4 $^1/_2$.

Le 15 septembre 1852, le cours moyen du 3 p. 0/0 étant 77fr.,05, celui du 4 $^1/_2$, 103fr.,65; lequel est le plus avantageux ?

En 3 p. 0/0, 3 fr. de rente annuelle sont produits par 77,05

1 fr. — — $\frac{77,05}{3}$

En 4 $^1/_2$ p. 0/0, 4fr.,50 de rente sont produits par 103,65

1 fr. — — $\frac{103,65}{4,50}$

L'avantage sera pour le fonds qui donnera 1 fr. de rente pour une somme moindre; il faut donc comparer les deux fractions ci-dessus, ou simplement leurs numérateurs, après réduction au même dénominateur :

$$77{,}05 \times 4{,}50 = 346{,}725$$
$$103{,}65 \times 3 = 310{,}95$$

Le 4 ½ p. 0/0 a l'avantage (*).

CHANGES.

407. De deux nations qui ont un change ouvert, l'une donne à l'autre une quantité fixe de sa monnaie pour en recevoir en échange un prix qui varie selon les circonstances.

La quantité fixe de monnaie donnée par une nation s'appelle le *certain*; la quantité variable donnée par l'autre, en retour, se nomme *l'incertain*.

Paris laisse le *certain* à toutes les autres places, et garde *l'incertain* pour lui. Par exemple, Paris donne à la Hollande (Amsterdam), 210 fr., plus ou moins, pour la quantité fixe de 100 florins hollandais. Paris donne à Londres 25 fr. 20, plus ou moins, pour une livre sterling quantité fixe.

La somme variable que Paris donne par une quantité fixe de monnaie hollandaise est ce qu'on nomme le prix du change avec la Hollande. Les banquiers et les négociants s'envoient mutuellement les cours des changes; ces cours sont également imprimés dans les journaux afin qu'on puisse apprécier l'avantage ou le désavantage du change avec tel ou tel pays. Mais ces cours ne contiennent seulement que l'un des termes du prix du change, celui qui varie, *l'incertain*, et nulle mention n'y est faite du terme invariable, du *certain*, que l'on suppose assez connu des négociants ou banquiers. On n'indique pas même l'espèce de monnaie de l'*incertain* qui est seulement exprimé par des chiffres. Il résulte de tout cela qu'un cours des changes est une espèce d'énigme pour ceux qui ignorent le certain (sous-entendu) et l'espèce de monnaie de l'incertain. Pour leur venir en aide, nous donnons le cours des changes étrangers cotés à la bourse de Paris, le 13 août 1852, en mettant le certain à côté de l'incertain;

(*) Ce qui fait acheter le 3 p. 100 plus cher que le 4 1/2, c'est la faculté de convertir le 4 1/2 en 4 p. 100, sans augmentation de capital, que le gouvernement pourra exercer à partir de 1862, la faculté analogue n'existant pas pour le 3 p. 100.

Cote des Changes de la Bourse de Paris du 13 août 1852.

INCERTAIN ou CHANGE. (EXPRIMÉ.)	CERTAIN (SOUS-ENTENDU).	DIVISIONS DES MONNA
à 3 mois.		
AMSTERDAM. . . . . 210 fr.	pour 100 florins. . .	1 fl.=40 deniers de gros ou 20 stuyvers.
HAMBOURG. 186 3/8	pour 100 marcs lubs.	1 m. l.=16 sous. l., 1 s. l.= 12 den.
BERLIN. 367 1/2	pour 100 rixdales. .	1 r.=24 bons gros, 1 b. gr. = 12 pfennings.
LONDRES. 25 20	pour 1 liv. sterling..	1 liv. sterl = 20 sous sterl., ou 20 schellings, 1 sou st.= 12 deniers sterl.
MADRID. . . . . . 521 1/2 CADIX. . . . . 521 1/2 BILBAO. 520	pour 100 piastres effectives.	1 piastre = 20 r. de veillon. *Remarque*. Le change avec l'Espagne était, il y a quelques années, de 15 fr. 90 c., plus ou moins pour 1 pistole de change = 4 piastres de change = 32 réaux de plata; 1 réal de pl.= 34 maravéd. 17 r. de pl =32 r. de veillon.
LISBONNE (effectif). . 5,57 1/2 PORTO (effectif). . . 5,57 1/3	pour 1000 rées. . . . *idem*.	On compte en Portugal par milrées (1000 r^s) ou par cruzades de 400 rées.
LIVOURNE. 82 1/2	p^r 100 liv. court^{es}. .	1 liv.=20 s., 1 s. = 12 den.
NAPLES. 432 1/2	pour 100 ducats. . .	1 ducat = 100 grains.
PALERME. 13	pour 1 once.	1 once=30 tarins, 1 tarin= 20 gr., d'ou 1 once=600 gr.
VIENNE. . . . . . . 208 TRIESTE. 207	pour 100 florins. . . *idem*.	1 florin = 60 kreutzers. *Remarque*. Le pair du florin de Vienne est 2 f. 60 c.; et il y a peu de temps le change était de 252 1/2; il est descendu en 1852 à 203 1/2, le papier sur Vienne se trouvant sans demande.
VENISE. . . . . 83 3/4 MILAN. 84	pour 100 livres autrichiennes. . . . . pour 100 livres autrichiennes. . . .	1 livre autrichienne=100 c.
AUGUSTE (Augsbourg). 203	pour 100 florins. . .	Comme à Vienne.
FRANCFORT. 208 3/4	p^r 100 fl. d'Empire.	1 fl. d'Empire = 60 kreutz. d'Empire = 15 batz d'Empire; 165 fl. d'Empire = 138 fl. de Vienne.
SAINT-PÉTERSBOURG. 396 1/2	pour 100 roubles. .	1 rouble = 100 copecks. — D'après un ukase du 13 juill. 1839, le rouble d'argent est déclaré l'unité légale, et son rapport fixé de 1 rouble d'argent pour 3 r. 50 cop. *assignation* (papier).

de cette manière, le lecteur connaîtra, une fois pour toutes, le certain qui ne varie pas et sera à même de le rétablir sur le cours des changes le jour où il en aura besoin.

Le cours des changes comprend souvent trois colonnes distinctes, intitulées, *à vue*, *à un mois*, *à 3 mois*; elles indiquent le prix du certain sur telle place, payable à présentation, à un mois, à 3 mois ou 90 jours; on comprend alors la différence des prix marqués sur la même ligne horizontale dans ces trois colonnes. (Exemple sur Londres, *à vue* 25, 27 $^1/_2$; *à 90 jours*, 25,20.) On remarque encore une subdivision de chacune de ces trois colonnes en deux plus petites. intitulées: *papier*, *argent*. La première, *papier*, indique que le papier sur telle place se trouve, est *offert* à Paris, à tel prix (incertain), pour le certain qui est toujours le même, quelle que soit l'échéance de la traite; la seconde *argent*, indique que le papier sur telle place est *demandé*, à Paris pour tel prix.

Nous terminerons ici ces notions succinctes sur le cours des changes; elles suffisent pour l'intelligence des opérations les plus ordinaires dont nous allons indiquer quelques-unes (*).

(*) Ajoutons cette remarque. On distingue dans certains pays jusqu'à trois espèces de monnaies: la monnaie de compte, les monnaies réelles et la monnaie de change.

La monnaie de compte est celle dans laquelle tous les comptes sont tenus, toute somme évaluée en definitive; c'est l'unité monétaire principale dont les autres monnaies réelles ne sont que des multiples ou des subdivisions. Ex. : Le franc.

Les monnaies réelles sont les pièces d'or, d'argent ou de cuivre en usage dans le pays. Ex. : Pour la France, 1 fr., 2 fr., 5 fr., 10 fr., 20 fr., 40 fr., etc.

Enfin, la monnaie de change, qui est quelquefois une monnaie réelle, mais souvent aussi une monnaie *nominale* dont on se sert dans les changes; cette monnaie de change, quand elle est simplement nominale, a une valeur bien déterminée en monnaie de compte. En France, le franc est à la fois monnaie de compte, monnaie réelle, et monnaie de change.

Il est fort utile de connaître la valeur en francs des monnaies de change indiquées sur la cote de Paris. Les voici :

Le florin d'Amsterdam	vaut à peu près	2fr.,10
Le florin d'empire	»	2 10
Le florin, Auguste, etc.	»	2, 05
La livre d'Italie (livre)	»	0, 85.

CHANGE DIRECT. *Un négociant de Paris reçoit d'un marchand de Saint-Pétersbourg un envoi de marchandises avec facture se montant à 1596 roubles, payables à 3 mois. Il demande à un banquier une traite de cette somme; combien payera-t-il au banquier, le change sur St-Pétersbourg étant coté à* 396 1/2.

Voici le calcul :

$$396{,}50 \text{ fr.} = 100 \text{ roubles.}$$
$$1596 \text{ roubl.} = x \quad \text{fr.}$$

d'où, en multipliant : $396{,}50 \times 1596 = 100 \times x$,

d'où $$x = \frac{396{,}50 \times 1596}{100} \text{ fr.}$$

Pour comprendre cette opération, il faut concevoir le mot *rouble* remplacé par le nombre qui exprime la valeur effective du rouble en francs ; ce nombre se trouvant des deux côtés devient facteur commun aux deux produits formés, et peut être supprimé; (il n'est pas nécessaire de le connaître). Supposons que le papier sur Saint-Pétersbourg ne soit pas offert ; alors le banquier demandera au négociant une commission qui sera de 1/2 pour 0/0, par exemple, sur le montant de la traite; celui-ci devra donc ajouter 1/2 p. 0/0 de la valeur de x.

Arbitrages; (*Règle conjointe*).

Il peut arriver que le change direct de Paris sur la place où l'on doit payer ne soit pas avantageux.

Alors on cherche si, par un échange indirect, on ne pourrait pas se libérer plus avantageusement.

L'once de Palerme	»	13fr.,00.
Le marc lub de Hambourg	»	1, 85.
Le rixdale de Prusse	»	3, 70.
La livre sterling	»	25, 00.
Le sou sterling ou schelling (1/20 de liv.)	»	1, 25.
Le denier sterling (1/12 de sou)	»	0, 104.
La piastre d'Espagne	»	5, 30.
Le ducat de Naples	»	4, 30.
Le rouble de Russie	»	3, 90.

Un négociant de Paris doit à Londres 1248 liv. sterl.; de Paris sur Londres, le change est coté $25^{fr.},20$; sur Hambourg, $186^{fr.},50$; à Londres, le Hambourg est coté 13 marcs lubs pour 1 livre sterling. Quel sera le plus avantageux de tirer de Paris sur Londres directement, ou de tirer de Paris sur Hambourg avec ordre au banquier de Hambourg de tirer sur Londres?

Change direct.

$$1 \text{ liv. st.} = 25^{fr.},20\,; \quad 1248 \text{ liv. st.} = 25^{fr.},20 \times 1248.$$

Change indirect. (Règle conjointe.)

$$186^{fr.},50 = 100 \text{ m lubs.}$$
$$13 \text{ marcs l.} = 1 \text{ liv. st.}$$
$$1248 \text{ l. st.} = x \text{ fr.}$$

d'où

$$186,50 \times 13 \times 1248 = 100 \times x,$$
$$x = \frac{186,50 \times 13 \times 1248}{100}. \text{ fr.}$$

Pour comprendre cette opération, il faut concevoir les mots, *marcs lubs*, *liv. st.*, remplacés respectivement par les nombres qui expriment en francs les valeurs du marc lub et de la liv. st.; si on a soin de disposer les égalités comme il est indiqué, chacun de ces nombres, qu'il n'est même pas besoin de connaître, disparaît comme facteur commun des produits égaux que l'on forme finalement.

Les deux calculs effectués, on verra par quelle voie les 1248 liv. sterl. seront payés par un moins grand nombre de francs, et c'est la voie qu'on choisira. Cela s'appelle faire un *arbitrage*.

On peut essayer si le change indirect sera plus avantageux en choisissant une autre place que Hambourg, ou bien en faisant un change plus indirect encore.

Ex. : Le change de Paris sur Berlin est coté $367^{fr.},50$; 152,04 rixdales de Prusse = 300 marcs banco de Hambourg; 100 marcs banco de Hambourg = 123 marcs lubs; 13 marcs lubs de Hambourg = 1 liv. sterl.; on doit payer à Londres 1248 liv. sterling.

Combien payera-t-on de francs par la voie indirecte de Paris sur Berlin, Berlin sur Hambourg, et Hambourg sur Londres.

$367^{fr.},50 = 100$ rixdales.
$152^{rixd.},04 = 300$ marcs banco.
100 marcs banco $= 123$ marcs lubs.
13 marcs lubs $= 1$ liv. st.
1248 liv. st. $= x$ fr.

d'où $317^{fr.},50 \times 152,04 \times 100 \times 13 \times 1248 = 100 \times 300 \times 123 \times x.$

$$\text{d'où } x = \frac{367^{fr.},50 \times 152,04 \times 100 \times 13 \times 1248^{fr.}}{100 \times 300 \times 123}.$$

Même observation que précédemment sur les facteurs communs, *rixdales, marcs banco, marcs lubs, liv. st.*, exprimés chacun par nn nombre de francs.

On comparera cette valeur de 1248 liv. sterl. aux deux précédentes.

Avant de faire la multiplication des nombres de gauche, il est bon de supprimer les facteurs communs qui se trouvent à droite et à gauche; ex. : 100, facteur commun de 100 et 300; on barre, 100 et 300, et on remplace le 1er par 1, et le 2e par 3; on fait comme pour la règle de trois; mais on fait les simplifications avant de multiplier.

Intérêts composés.

408. *Les intérêts sont* COMPOSÉS *quand, chaque année, on joint au capital l'intérêt qu'il a produit pour former un nouveau capital produisant intérêt durant l'année suivante* (*).

PROBLÈME. *Que devient au bout de* 8 *ans un capital de* 12000 *fr. placé à intérêts composés, à* 5 *p.* 0/0.

1 fr., en un an, rapporte 5/100 ou 0,05 d'intérêt; chaque capital de 1 fr. augmenté de son intérêt devient donc, au bout de l'année, 1,05; donc 12000 fr. ou 12000 capitaux de 1 fr. prendront à la fin de la première année une valeur égale à 1,05 ×

(*) Les intérêts se capitalisent généralement d'année en année; on pourrait convenir d'une autre période.

12000 = 12000 (1,05) = a_1. Ce capital, a_1 fr., produit intérêt durant la deuxième année; chaque franc de ce capital, augmenté de ses intérêts pour cette deuxième année, devient 1,05; les a_1 fr. prennent une valeur égale à $a_1 \times 1,05 = a_2$. Remplaçant a_1, par sa valeur numérique, on trouve $a_2 = 12000 \times (1,05) \times 1,05 = 12000\ (1,05)^2$.

Le capital a_2, placé au commencement de la troisième année, prend à la fin de cette troisième année, la valeur $a_2 \times (1,05)$, d'après le même raisonnement; $a_2 \times 1,05 = 12000 \times (1,05)^2 \times 1,05 = 12000\ (1,05)^3 = a_3$. Au bout de quatre ans, la valeur des 12,000 sera devenue $12000\ (1,05)^4$; etc., jusqu'à la huitième année, à la fin de laquelle le capital a pris la valeur $12,000 \times (1,05)^8$.

Ce raisonnement est tout à fait général; si on veut traduire le résultat en formule, on désignera par a la valeur du capital, par i l'intérêt de 1 fr. pour un an, et la valeur de a au bout de n années par A; le raisonnement étant fait sur A comme sur 12000 on arrive à cette formule $A = a\,(1+i)^n$ (1).

Une pareille valeur se calcule ordinairement à l'aide des logarithmes; $\log. A = a + n \log (1+i)$.

Dans l'exemple proposé:

$$\log A = \log 12000 + 8 \log (1,05).$$

Que devient au bout de 8 ans 3 mois 20 jours un capital de 12000 fr. placé à intérêts composés, et à 5 p. 0/0 par an.

Au bout de 8 ans, d'après ce qui précède, le capital a pris une valeur de $12000\ (1,05)^8$. Cette somme $12000\ (1,05)^8$ doit encore rester placée à intérêts simples durant 3 mois 20 jours ou 110 jours.

L'intérêt de 1 franc pour 110 jours à 5 pour 0/0 est $\dfrac{0,05 \times 110}{360}$ (formule générale); 1 franc augmenté de son intérêt, pour 110 jours, devient donc égal à $1 + \dfrac{0,05 \times 110}{360}$.

Chaque franc prenant cette valeur, le dernier capital 12000 $(1,05)^8$ prendra cette valeur multipliée par $12000\ (1,05)^8$; donc

la valeur cherchée des 12000 fr. au bout de 8 ans 3 mois 20 jours.

$$A = 12000(1,05)^8 \times \left(1 + \frac{0,05 \times 100}{36}\right).$$

On évalue A à l'aide des logarithmes.

Ce raisonnement est général; on peut formuler ainsi le résultat

$$(2) \qquad A = a(1+i)^n \left(1 + i \times \frac{p}{q}\right);$$

$\frac{p}{q}$ est la fraction d'année qui accompagne le nombre entier d'années (dans l'exemple précédent, 110/360).

PROBLÈME INVERSE. *Quel est le capital qui, placé à 4 p. 0/0, prendrait au bout de* 8 *ans une valeur de* 15000 fr.

Appelons a le capital inconnu; en le soumettant au raisonnement du n° 408, ou employant la formule (1), on a $A = a(1.04)^8$; mais $A = 15000$; donc, $15000 = a \times (1,04)^8$. Appliquant les logarithmes, nous aurons :

$$\log 15000 = \log a + 8 \log 1,04,$$

d'où
$$\log a = \log 15000 - 8 \log 1,04.$$

PROBLÈME. *Au bout de combien un capital, placé à intérêts composés et à* 5 0/0, *est-il doublé ?*

a doit devenir $2a$; remplaçant, dans la formule (1), A par $2a$, on trouve

$$2a = a(1,05)^n \quad \text{ou} \quad 2 = (1,05)^n.$$

On voit facilement que n n'est pas un nombre entier (150). Le capital ne se trouvera pas doublé exactement au bout d'un nombre entier d'années; supposons qu'il se trouve doublé dans l'intervalle de la $p^{\text{ième}}$ à la $(p+1)^{\text{ième}}$ année.

$$(1,05)^p < 2 \quad \text{ou} \quad (1,05)^n < (1,05)^{p+1}.$$
$$p \log(1,05) < n \log(1,05) < (p+1)\log(1,05).$$

ou enfin
$$p < n < p+1.$$

Ainsi, la partie entière de l'expression en années du temps

cherchée est la partie entière de la valeur du nombre n de l'équation $2 = (1,05)^n$.

En appliquant les logarithmes à cette égalité, on trouvera le nombre d'années cherché n à moins d'une unité.

Supposons qu'on ait trouvé 14 ans; on mettra 14 dans la formule (2); puis l'égalité

$$2a\,(1,05)^{14}\left(1+0,05\,\frac{p}{q}\right)=a,$$

simplifiée, donnera la valeur de $\frac{p}{q}$ ou de la fraction d'année complémentaire de 14.

On trouverait de même le temps au bout duquel un capital est triplé, quadruplé, etc...., acquiert une valeur donnée quelconque.

Annuités.

409. PROBLÈME. *Un employé fait, chaque année, 600 fr. d'économies qu'il place chez un banquier à intérêts composés, à 5, p. 0/0. Ayant pris sa retraite au bout de 25 ans, il retire son argent pour acheter une maison, en y joignant ses économies de la dernière année. Combien possède-t-il en tout?* (Placement par annuités.)

L'intérêt de 1 fr. pour 1 an est 0,05. La première somme de 600 fr. reste placée chez le banquier durant 24 ans; elle acquiert donc la valeur $600\ (1,05)^{24}$; formule (1), page 330.

La deuxième somme placée durant 23 ans devient $600\ (1,05)^{23}$; la troisième somme id. pendant 22 ans devient $600\ (1,05)^{22}$, et ainsi de suite. L'avant-dernier placement ne durant qu'un an, les 600 fr. deviennent seulement 600 (1,05); le dernier ne rapporte aucun intérêt; c'est 600 fr.

La somme de toutes ces valeurs acquises au bout de 25 ans, dans leur ordre renversé, est donc $600 + 600\ (1,05) + 600\ (1,05)^2 + \ldots + 600(1,05)^{24}$ ou $600\ (1 + 1,05 + 1,05)^2 + (1,05)^3 + \ldots + (1,05)^{24})$. La somme entre parenthèses est la somme des termes d'une progression par quotient dont le 1er terme est 1, la raison 1,05 et le nombre des termes 25. Faisons donc dans la formule

$$S = \frac{aq^n - a}{q-1}$$ du n° 344, $a = 1$, $q = 1,05$ et $n = 25$.

On en déduit $S = \frac{(1,05)^{25} - 1}{0,05}$; donc, l'employé possédera $600 \frac{(1,05)^{25} - 1}{0,05}$; on calcule $(1,05)^{25}$ par logarithmes.

Le problème précédent est analogue à celui-ci qui se résoudrait de même. Un père verse chaque année, jusqu'à sa mort, la somme de 600 fr. chez un banquier, ou à la caisse d'une compagnie, afin que ces sommes avec leurs intérêts composés à 5 p. 0/0 soient remboursés à ses enfants après sa mort; combien le banquier aura-t-il à payer, les placements ayant duré 19 ans?

Un particulier emprunte 12000 *fr. à condition de les rembourser en* 12 *annuités, c'est-à-dire en* 12 *payements égaux effectués à la fin de chaque année qui s'écoule. Trouver la quotité* a *de l'annuité payée.*

Il est convenu qu'on tiendra compte des intérêts composés, à 4 p. 0/0, tant au créancier pour le capital, qu'au débiteur, à raison de l'anticipation des divers payements sur le terme de 12 ans.

Si le débiteur ne payait absolument rien avant la fin de la douzième année, il devrait alors $12000\,(1,04)^{12}$. Mais il donne au bout de la première année la somme a; le créancier pouvant placer cette somme pendant 11 ans, peut être considéré comme recevant $a \times (1,04)^{11}$ à la fin de la douzième année; de même la deuxième annuité de a fr. équivaut à un payement $a\,(1,04)^{10}$ fait à la fin de la douzième année, et ainsi de suite. Tous les payements partiels étant supposés transportés à la fin de la douzième année et augmentés de leurs intérêts comme nous venons de l'expliquer, le créancier peut être considéré comme recevant en une fois à la fin de la douzième année

$$a(1,05^{11}) + a(1,05)^{10} + \dots a(1,05) + a.$$

Mettant a en facteur commun et renversant, nous trouvons qu'il a reçu

$$a\,1 + 1,04 + (1,04)^2 + \dots + (1,04)^{10} + (1,04)^{11}) = a\frac{(1,04)^{12} - 1)}{0,04};$$

mais il doit recevoir $12000\,(1,04)^{12}$; donc,

$$a\,\frac{(1,04)^{12} - 1}{0,04} = 12000(1,04)^{12},$$

d'où on déduit a; $(1,04)^{12}$ se calcule par logarithmes.

Assurances sur la vie; rentes viagères; tontines.

410. Les questions relatives aux assurances sur la vie, les rentes viagères et les tontines se résolvent à l'aide de l'une des tables que nous donnons ci-après.

La première donnée par Duvillard, en 1806, n'est plus d'accord avec les faits de l'époque actuelle ; elle donne une mortalité trop rapide pour l'état actuel de la population en France. La seconde, construite par Deparcieux, vers 1746, pour des têtes choisies, donne une mortalité bien moins rapide que celle de Duvillard.

Ces deux tables sont employées en France par les compagnies d'assurance sur la vie; elles se servent de la table de Duvillard, pour les assurances payables au décès des assurés; mais pour les assurances payables du vivant des assurés, elles font usage de la table de Deparcieux.

Loi de la mortalité en France, d'après DUVILLARD.

Ages	Vivants.	Ages	Vivants.	Ages	Vivants.	Ages	Vivants.	Ages	Vivants.
0	1000000	23	484083	45	334072	67	146882	89	4686
1	767525	24	477777	46	326843	68	137102	90	3830
2	671834	25	471366	47	319539	69	127347	91	3093
3	624668	26	464863	48	312148	70	117656	92	2466
4	598713	27	458282	49	304662	71	108070	93	1938
5	583151	28	451635	50	297070	72	98637	94	1499
6	573025	29	444932	51	289361	73	89404	95	1140
7	565838	30	438188	52	281527	74	80423	96	850
8	560245	31	431398	53	273560	75	71745	97	621
9	555486	32	424583	54	265450	76	63424	98	442
10	5511 2	33	417744	55	257193	77	55511	99	307
11	546888	34	410886	56	248782	78	48057	100	207
12	542630	35	404012	57	240214	79	41107	101	135
13	538255	36	397123	58	231488	80	34705	102	84
14	533711	37	390219	59	222605	81	28886	103	51
15	528969	38	3383300	60	213567	82	23680	104	29
16	524020	39	3 76363	61	204380	83	19106	105	16
17	518863	40	3 69404	62	195054	84	15175	106	8
18	513502	41	362 419	63	185600	85	11886	07	4
19	507949	42	5 5400	64	176035	86	9224	108	2
20	502216	43	348342	65	166377	87	7165	109	1
21	496317	44	341235	66	156651	88	5670	110	0
22	490267								

Loi de la mortalité en France, pour les têtes choisies, suivant DEPARCIEUX, *complété pour les premières années.*

Ages.	Vivants.	Ages.	Vivants.	Ages.	Vivants.	Ages.	Vivants.	Ages.	Vivants.
0	1286	20	814	39	664	58	489	77	173
1	1083	21	806	40	657	59	476	78	154
2	1022	22	798	41	650	60	463	79	136
3	990	23	790	42	643	61	450	80	118
4	966	24	782	43	636	62	437	81	101
5	947	25	774	44	629	63	423	82	85
6	930	26	766	45	622	64	409	83	71
7	915	27	758	46	615	65	395	84	59
8	902	28	750	47	607	66	380	85	48
9	890	29	742	48	599	67	364	86	38
10	880	30	734	49	590	68	347	87	29
11	872	31	726	50	581	69	329	88	22
12	866	32	718	51	571	70	310	89	16
13	860	33	710	52	560	71	291	90	11
14	854	34	702	53	549	72	271	91	7
15	848	35	694	54	538	73	251	92	4
16	842	36	686	55	526	74	231	93	2
17	835	37	678	56	514	75	211	94	1
18	828	38	671	57	502	76	192	95	0
19	821								

Usage des tables de mortalité.

411. Pour savoir dans quelle proportion les hommes meurent à un âge déterminé, on cherche combien il en meurt durant l'année suivante; on divise le nombre des vivants par celui des morts; le quotient exprime sur combien d'individus l'un meurt durant l'année.

Quelle est la chance de mort pour une personne de 42 ans?

On cherche l'âge de 42 ans dans la table sur laquelle on opère; celle de Duvillard, par ex. : sur 355400 personnes de 42 ans, il en reste, au bout d'un an, 348342 ; il en est donc mort 7058 ; on divisera le nombre des survivants 348342 par 7058, le quotient est 49 1/2 ; on conclut de là qu'il meurt 2 individus sur 99 ; la chance de mort est $\frac{2}{99}$; la chance de vie est $\frac{99}{2}$. (Faire ce calcul avec la seconde table.)

412. *Sur 400 personnes âgées de 40 ans combien atteindront probablement l'âge de 60 ans?*

Prenons la table de Duvillard : Sur 369404 personnes de 40 ans, il y en a 213567 qui atteignent l'âge de 60 ans. Il est évident que, si 400 est 2, 3, 4, ... m fois plus petit que 369404, le nombre, x, des personnes qui, sur les 400 susdites, atteindront l'âge de 60 ans sera 2, 3, 4... m fois plus petit que 213567.

$$\frac{400}{369404} = \frac{x}{213567}; \; x = \frac{400 \times 213567}{369404}.$$

On évaluera le quotient à moins d'une unité.

(Faire ce calcul avec la seconde table.)

413. Quand on veut savoir combien d'années une personne d'un âge déterminé peut encore espérer de vivre, on prend dans la table de mortalité le nombre des vivants de cet âge ; on le divise par 2, et on cherche dans la table à quel âge cette moitié correspond ; car la moitié seulement des personnes vivant à l'âge donné atteignant l'âge trouvé, il est clair qu'il y a autant à parier pour la vie que pour la mort de la personne en question.

On demande à quel âge arrivera probablement une personne de 40 ans ?

Le nombre des vivants à 40 ans, dans la table de Duvillard, est 369404 ; la moitié de ce nombre est 184702 ; si on cherche ce nombre dans la table, on trouve qu'il tombe entre les 2 nombres 195054 et 185600, qui correspondent à 62 et 63 ans ; la personne en question peut espérer de vivre à peu près jusqu'à 63 ans.

Une personne de 54 ans désire savoir combien d'années elle peut espérer de vivre encore ? C'est la même question.

Rentes viagères. *Une personne de 42 ans, qui possède une fortune de 48000 francs, veut la placer en rentes viagères, c'est-à-dire, la donner à une personne ou à une association qui lui fournira en retour une annuité calculée sur le temps probable qu'elle a à vivre.*

On demande quel est ce nombre d'années, et par suite, quelle est l'annuité ou la rente viagère qui à sa mort aura été l'équivalent des 48000 francs, l'intérêt étant à 4 p. 0/0 l'an.

Puisqu'il s'agit de rentes viagères, prenons la table de Deparcieux. Nous divisons par 2 le nombre, 643, à droite de 42 ans ; la moitié de 643 est 321, qui tombe entre 329 et 310, nombres correspondants à 69 et à 70 ; la personne en question a probablement 27 à

28 ans à vivre ; prenons 28, parce que les prêteurs prennent le nombre qui leur est le plus avantageux. Il faut chercher l'annuité qui éteindrait en 28 ans un capital de 30000 fr. Appelant a l'annuité demandée, on raisonnera et on opérera comme au n° 409, et on trouvera :

$$30000\,(1,05)^{29} = a\,\frac{(1,05)^{29}-1}{0,05}\,;$$

d'où
$$a = \frac{30000(1,05)^{29} \times 0,05}{(1,05)^{29}-1}.$$

On calculera $(1,05)^{29}$ par logarithmes.

Mais les compagnies d'assurances sur la vie ne peuvent donner précisément l'annuité calculée au numéro précédent, puisqu'elles n'y gagneraient rien. Elles donnent donc moins, comme les cinq sixièmes, les six septièmes, les sept huitièmes. Elles rabattent tant p. 0/0, 12 ou 15 p. 0/0, par ex., de l'annuité précédente.

Les compagnies d'assurances reçoivent aussi des rentes viagères, à condition de les remettre, avec les intérêts, aux héritiers de celui qui les leur donne.

Une personne de 60 ans veut payer 1000 fr. d'annuité jusqu'à sa mort. On demande *ce qu'une compagnie, qui prend* 15 *p.* 0/0 *de bénéfice, devra donner aux héritiers de cette personne, le taux étant* 5 *p.* 0/0 par an.

En cherchant la limite d'âge que cette personne a la probabilité d'atteindre (V. n° 413), on trouve 71 ans. On cherchera la valeur des annuités et de leurs intérêts composés au bout de 11 ans ; on trouve $\frac{1000\ (1,05)^{12}-1)}{0,05}$. On prendra les 0,85 de cette somme (déduction des 15 p. 0/0) ; le résultat sera la somme que la compagnie doit s'engager à donner aux héritiers.

Si la personne en question ne faisait qu'un seul placement de 1000 fr. entre les mains de la compagnie et à l'âge susdit, la compagnie tiendrait compte seulement de $1000\ (1,05)^{12} \times 0,85$ (la 1re des annuités).

414. Assurances sur la vie. *Un particulier place une somme de* 1000 *fr. sur la tête d'un enfant nouveau-né, c'est-à-dire, donne cette somme à une compagnie d'assurances sur la vie, pour qu'elle s'engage à remettre une certaine somme à l'enfant nouveau-né,*

quand il aura atteint sa vingtième année, par exemple. Mais s'il meurt avant cet âge, les 1000 fr. seront acquis à la compagnie qui n'aura aucun déboursé à faire. Quelle est la somme que la compagnie devra s'engager à payer, sans bénéfice, le taux de l'argent étant 5 p. 100 par an?

La somme de 1000 fr placée à intérêts composés pendant 20 ans au taux de 5 p. 100, prend la valeur $1000\,(1{,}05)^{20}$ (V. n° 408). Sur 1000000 d'enfants nés ensemble, il y en a, d'après Duvillard, 502216 qui atteignent l'age de 20 ans, et par suite 497784 qui meurent avant cet âge. La compagnie a 497784 chances de ne pas payer, contre 502216 chances de payer; sa chance de bénéfice est mesurée par le rapport $\frac{497784}{502216}$; et comme ce bénéfice est proportionnel à la somme sur laquelle il porte, dans notre exemple, $1000(1{,}05)^{20}$, le bénéfice éventuel de la compagnie est donc définitivement mesuré par le nombre $\frac{497784}{502216} \times 1000 \times(1{,}05)^{20}$. Pour que les chances soient égales de part et d'autre (à cause de cette condition, *sans bénéfice*), le nouveau-né doit avoir droit, s'il parvient à l'âge de 20 ans, au même bénéfice éventuel, en sus de la somme de $1000(1{,}05)^{20}$, laquelle lui est acquise comme représentant le dépositaire. La somme que la compagnie doit s'engager à donner est donc égale à

$$1000\,(1{,}05)^{20} + 1000\,(1{,}05)^{20} \times \frac{497784}{502216} = \frac{1000(1{,}05)^{20} \times 1000000}{502216}.$$

Rép. 5283,18.

C'est ici une assurance sur la vie; les compagnies emploient donc dans ce cas la table de Deparcieux ou une table analogue dans laquelle le nombre des survivants est plus grand que dans Duvillard, qui donne une mortalité trop rapide. Nous avons pris nos nombres dans Duvillard; le lecteur peut les prendre dans Deparcieux, et comparer les résultats. Des compagnies anglaises se servent, pour les assurances sur la vie, de la table de mortalité de la ville de Carlisle, laquelle indique 6090 enfants sur 10000 nouveau-nés, atteignant l'âge de 20 ans. On fera bien de refaire le calcul avec ces nombres (il n'y aura qu'à mettre 6090 et 10000 au lieu de 497784 et 1000000). Le rapport $\frac{10000}{6090} = \frac{1000000}{609000}$ étant

plus petit que le rapport $\frac{1000000}{502216}$, la compagnie aura moins à donner. Aussi fait-on en France comme en Angleterre.

Mais une compagnie a des frais de gestion, le soin de faire valoir l'argent, et par suite des risques à courir, toutes choses qui n'existent pas pour l'assuré (la solvabilité de la compagnie admise); celle-ci doit donc se faire allouer une rémunération et une compensation; elle le fait en stipulant qu'elle retiendra tant pour 100 de la somme que fournit le calcul, à chances égales, tel que nous venons de faire; elle retient 15 p. 100, par exemple, et s'engage à donner seulement les 0,85 de cette somme (*).

On place 5000 *fr. sur la tête d'un enfant de* 7 *ans; combien la compagnie devra-t-elle payer s'il parvient à l'âge de* 25 *ans, sans bénéfice, le taux étant* 5 *p.* 100 *par an.*

5000 placés à intérêts composés pendant 18 ans prennent la valeur 5000 $(1,05)^{18}$. D'après Deparcieux, sur 915 enfants de 7 ans, 774 atteignent 25 ans, et 141 meurent avant cet âge; le bénéfice éventuel de la compagnie sera mesuré par les $\frac{141}{774}$ de la somme qu'elle peut gagner, c'est-à-dire, par $5000(1,05)^{18} \times \frac{141}{774}$; le même bénéfice éventuel étant accordé à l'enfant en sus de la somme de 5000 $(1,05)^{18}$ qui lui est acquise nécessairement, s'il atteint 25 ans, cet enfant devra alors toucher en tout :

$$5000\,(1,05)^{18} + 5000\,(1,05)^{18} \times \frac{141}{774} = \frac{5000\,(1,05)^{18} \times 915}{774}.$$

C'est là le point de départ pour le calcul du bénéfice naturel de la compagnie et de la somme qu'elle s'engage à payer suivant ses statuts.

(*) Supposons une tontine formée par une association d'un certain nombre d'enfants nouveau-nés; chacun laisse 1000 fr., sans rien toucher, entre les mains d'une compagnie, à condition que la totalité de la somme placée et ses produits seront partagés entre ceux des associés qui atteindront l'âge de 20 ans, déduction faite toutefois de 15 p. 100 de la valeur à partager attribués à la compagnie pour frais de gestion, etc. La part de chaque survivant est justement ce qui est accordé à l'enfant du problème ci-dessus. La compensation de l'avantage que la compagnie accorde à cet enfant de le considérer comme faisant partie d'une telle association, tandis qu'il verse isolément, c'est la chance que cet enfant ne soit pas du nombre des survivants. (V. les tontines.)

On remarquera que les fractions telles que $\frac{1000000}{502216}$, $\frac{10000}{6090}$, $\frac{915}{774}$, déduites de la table de mortalité que la compagnie adopte, sont des multiplicateurs fixes qui dépendent uniquement des âges indiqués dans chaque opération. On conçoit donc que les compagnies puissent former à l'avance des tables comprenant ces multiplicateurs; de même pour les rentes viagères qu'elles payent ou qu'elles reçoivent.

Une personne de 30 ans, par exemple, peut placer sur sa propre tête une somme déterminée, à condition que la compagnie lui payera une autre somme déterminée quand elle aura atteint 50 ans, par exemple; la compagnie devant garder la somme déposée avec ses intérêts, si cette personne n'atteint pas l'âge de 50 ans.

415. TONTINES. Les tontines sont des associations formées dans des conditions que les exemples suivants font suffisamment connaître.

1er CAS. 100 *personnes âgées de* 35 *ans ont formé une* tontine, *c'est-à-dire, qu'elles ont placé en commun chacune* 6000 *fr. avec cette condition que les survivants se partageront chaque année le revenu des* 600000 *fr. placés, et que le capital sera acquis au dernier survivant. Le taux de l'intérêt étant de* 5 *p.* 0/0, *le revenu individuel sera à la fin de la* 1re *année*, 300 *fr.*, *s'il ne meurt aucun des associés durant ce temps-là. On demande au bout de combien de temps le revenu individuel sera doublé, triplé, quadruplé, quintuplé, etc., suivant la table de mortalité de Duvillard; même question en se servant de la table de Deparcieux.*

La question revient à celle-ci: Trouver à quel âge un certain nombre de personnes ayant en même temps 35 ans sera réduit à moitié, ou au tiers, ou au quart, ou au cinquième. On ouvrira la table adoptée; on y prendra le nombre qui est à côté de 35 ans; on le divisera successivement par 2, 3, 4, 5; on cherchera à quel âge correspond chacun des quotients; on aura le temps cherché pour chaque cas; avec les tables de Duvillard on trouve ainsi, à moins d'une unité, 26, 33, 36, 39; avec celle de Deparcieux on trouve 33, 39, 42, 44.

2e CAS. 64 *personnes de* 40 *ans forment une tontine, et chacune met* 8000 *fr. à la masse; quand les associés auront* 60 *ans, ils se*

partageront le capital dont ils auront jusque-là touché les intérêts. On demande quelle sera la part probable de chaque survivant ?

Il suffit évidemment de chercher, d'après la table choisie, combien de personnes de 40 ans sur 64 atteignent l'âge de 60 ans (n° 413), et de diviser le capital 80000 fr. × 60 = 4800000 fr. par le nombre trouvé.

3° CAS. *48 personnes de 40 ans mettent chacune 7000 fr. en commun ; ce fonds étant placé à intérêts composés et à 4 p. 0/0 par an, les associés survivants se le partageront à l'âge de 60 ans ; quelle sera la part probable de chacun ?*

On détermine la valeur que prend le fonds commun 7000 fr. × 48 = 336000 fr. placé à intérêts composés pendant 20 ans ; c'est $336000(1,04)^{20}$; puis on cherche, d'après la table de mortalité, combien de personnes de 40 ans sur 48 atteignent l'âge de 60 ans ; on divise $336000(1,04)^{20}$ par le nombre trouvé ; le résultat obtenu est la part probable demandée.

Problèmes sur les densités ou pesanteurs spécifiques.

416. *La densité du fer est 7,788 ; on demande à moins d'un centim. cube le volume d'une masse de fer pesant 15 kil.,520.*

15 kil.,520 = 15520 grammes ; 7 gr.,788 est le poids d'un centimètre cube de fer (V. page 187). Le volume demandé se compose donc d'autant de centimètres cubes qu'il y a de fois 7 gr.,788 dans 15520 grammes.

$$V = \frac{15520^{c.c.}}{7,788} = \frac{15520000^{c.c.}}{7788}.$$

On peut employer la méthode de division abrégée.

La densité du mercure est 13,598 ; quelle est la pression de l'air atmosphérique sur un mètre carré de surface sachant que cette pression équivaut à celle d'une colonne de mercure, qui, s'appuyant sur la même base, aurait 760 millimètres de hauteur.

1 centimètre cube de mercure pèse 13 gr.,598 ; le mètre cube = 1000000 centimètres cubes pèse 13598000 grammes, ou 13598 kilog. Si la colonne de mercure avait un mètre de hauteur au-dessus de sa base de 1 mètre carré, ce serait un mètre cube de mercure ; mais n'ayant que 760 millim. de hauteur, elle équivaut

évidemment aux 760 millièmes d'un mètre cube, et pèse $13598^{kil.} \times 0,760$ ou $13598^{gr.} \times 760$.

La densité du zinc est 7,19; combien pèse dans l'air un lingot de zinc pesant dans le vide $2^{kil.},520$, *on demande le poids à un gramme près.* (*V. page* 187).

Il pèsera $2^{kil.},520$ moins le poids d'un volume d'air égal au sien; il faut trouver son volume.

La densité du zinc est 7,19, cela veut dire qu'un centimètre cube de zinc pèse dans le vide $7^{gr.},19$; il y aura autant de centimètres cubes dans la masse de zinc qu'il y a de fois $7^{gr.},19$ dans $2520^{gr.}$; ce volume est donc $\frac{2520}{7,19}$ centim. cubes. Chaque centimètre cube d'air pèse $0^{gr.},001298701$. (V. page 187). Le poids de l'air déplacé sera donc $\frac{0^{gr.},001298701 \times 2520}{7,19}$; on évaluera ce quotient à moins de 0,1 par la méthode abrégée, et on retranchera le résultat de $2520^{gr.}$; le reste sera le poids demandé du lingot de zinc dans l'air.

A la pression de 760 millimètres et à la température de 0°, si on prend la densité de l'air sec pour unité, on trouve pour densité des gaz suivants : oxygène 1.1057; *azote* 0,9720; *hydrogène* 0,0691; *chlore* 2,470. *On demande le poids d'un litre de ces différents gaz à* 0,001 *gramme près.*

La densité d'un gaz, quand celle de l'air sec est prise pour unité, est le rapport du poids d'un volume quelconque de ce corps au poids d'un égal volume d'air sec.

D'après cette définition, si on appelle p le poids d'un litre d'oxygène, sachant que le litre d'air pèse $1^{gr.},298701$; on en conclut $p : 1,298701 = 1,1057$, d'où $p = 1^{gr.},298701 \times 1,1057$. Le même raisonnement peut être fait pour les autres gaz.

On obtiendra les poids demandés avec l'approximation voulue, en effectuant les multiplications abrégées que nous allons poser.

Chlore.	Hydrogène.	Azote.	Oxygène.
1,2987 01	1,2987 01	1,2987 01	1,2987 01
7501,1	279,0	1960.0	074,2

La densité du mercure étant 13,598, *et celle du fer forgé de*

7,788, *on demande de combien un morceau de fer s'enfonce dans le mercure sur lequel il flotte.*

Le fer perd dans le mercure un poids égal à celui du volume de mercure qu'il déplace; puisqu'il flotte, il perd justement tout son poids.

Soit v le volume de la portion de fer submergée. V le volume total du fer. v étant le volume du mercure déplacé, v centimètres de mercure doivent peser autant que V centimètres cubes de fer; or. 1 centimètre cube de mercure pèse 13,598, et 1 centimètre cube de fer pèse 7,788; donc $v \times 13,598 = V \times 7,788$; d'où

$$v = V \times \frac{7,788}{13,598} = V \times \frac{7788}{13598}.$$

On évaluera le quotient à 0,001 près par la *division* abrégée. Il n'y aura qu'à continuer l'opération jusqu'au 3e chiffre

Remarque. Avec les valeurs approchées données des densités, on ne peut obtenir une valeur plus approchée du rapport des volumes.

Notre but, en donnant ces problèmes sur les densités, a été principalement de montrer comment on pouvait abréger les opérations qu'ils exigent. Voici d'autres exemples, toujours pris dans la physique.

417. *La dilatation linéaire du fer est de* 0,0000122 *de sa longueur pour chaque degré d'augmentation de température, mesuré par le thermomètre centigrade; on demande à* 0,0001 *près la dilatation d'une règle de fer de* 2,245^{mètres}, *pour* 25° *de réchauffement.*

Le coefficient de dilatation linéaire, ex. : 0,0000122, est l'allongement de l'unité de longueur du corps pour 1° de réchauffement; ainsi, chaque mètre de la règle, pour 1° de réchauffement, s'allonge de 0$^{\text{mét.}}$,0000122; pour 25°, ce sera 0$^{\text{mét.}}$,0000122 × 25 = 0$^{\text{mét.}}$,000305 par mètre; l'allongement total sera donc 0$^{\text{mét.}}$,000305 × 2,245.

Nous voulons le résultat à 0,0001 près, nous poserons ainsi la multiplication abrégée :

$$\begin{array}{r} 2,24500\ 0 \\ \underline{3\ 05000,0} \end{array}$$

Tous les gaz se dilatent de la 0,00366e *partie de leur volume à zéro pour chaque degré de réchauffement. Que devient donc un litre*

d'air à zéro, en passant à la température de 27°. On demande, en même temps, à un milligramme près, le poids d'un litre d'air à cette température de 27°.

Il est clair que le litre d'air pris à zéro remplirait à 27° un vase contenant $1^{lit.} + 0^{lit.},00366 \times 27 = 1^{lit.},09882$.

En second lieu, le gaz n'ayant pas changé de poids en changeant de volume, il en résulte que :

$$1^{lit},09882 \text{ d'air à } 27° \text{ pèse } 1^{gr.},298701 ;$$

$$1^{lit.} \times 1,09882 \text{ pèse } 1^{gr.},298701, \qquad \text{donc}$$

$$1^{lit.} \text{ pèse } 1^{gr.},298701 : 1,09882 = \frac{1298701}{1098820} \text{ grammes.}$$

Pour avoir ce poids à 0,001 près, c'est-à-dire avec 4 chiffres, on divisera 129870 par 109882 par la méthode abrégée, en poussant l'opération jusqu'au 4ᵉ chiffre ; puis on séparera 3 chiffres décimaux.

La dilatation d'un corps ou volume est exprimée par une fraction triple de celle qui représente la dilatation linéaire ; ainsi elle est de 0,0000366 *pour le fer.*

On demande, à moins de 0,001, *la densité du fer à la température de* 30°, *sachant qu'à* 1°, *elle est de* 7,788, *et le poids d'une masse de fer dont le volume à* 30° *est de* $1,548^{mèt.cub.}$; *trouver le volume de la même masse à* 4° *à moins de* 0,001.

1 centimètre cube de fer à 4° pèse $7^{gr.},788$; ce centimètre cube de fer à 30° devient 1 cent. cube $\times$ 0,0000366 $\times$ 26 $= 1^{c.c}$, 0009516, et pèse toujours $7^{gr.},788$; donc 1 c. cube de fer à 30° pèse $\frac{7^{gr.},788}{1,0009516}$. Si donc on prend toujours pour unité la densité de l'eau à 4°, la densité demandée du fer à 30° est $\frac{7^{gr.}.788}{1,0009516}$.

On emploiera la division abrégée pour avoir ce quotient à moins de 0,001 ; le quotient ayant 4 chiffres, il faudra prendre 6 chiffres du diviseur, 1,000952 (par excès) ; on divisera 7,788000 par 1,000952 et on poussera jusqu'au 4ᵉ chiffre du quotient ; il sera mieux de prendre les 7 chiffres 1,0009516 du diviseur, de pousser le quotient jusqu'au 5ᵉ chiffre pour effacer le dernier (n° 205). Cette densité est 7,7859.

La densité du fer à 30° étant 7,7859, le cent. cube à cette température pèse 7 gr.,7859 ; donc 1 m. cube,548 pèse 7 gr.7859 $\times$ 1548000 $=$ 7 kil.,7859 $\times$ 1548.

Si on appelle x le volume à 4°, le volume x, à la température de 30°, devient $x + x \times 0{,}0000366 \times 26 = x \times 1{,}0009516$. On a donc l'égalité $x \times 1{,}0009516 = 1{,}548$ d'où $x = \dfrac{1{,}548}{1{,}0009516}$ on évaluera le quotient à 0,001, c'est-à-dire, à moins d'une unité de son 4e chiffre significatif. On prendra donc 6 chiffres du diviseur, on divisera 1,548 par 1,00096 (par excès). Rep. $v = 1$ m.c.,546.

Pour plus de sûreté, il vaut mieux calculer 5 chiffres de v pour effacer le 5e.

1548000	$1{,}00\not{0}\not{9}\not{6}z$
547048	$1{,}546\not{5}$
46673	
6637	
637	

Problèmes de cosmographie.

418. Le *cycle solaire* est une période de 28 années juliennes, après laquelle les jours de la semaine reviennent dans le même ordre aux mêmes jours des mois. Le *cycle lunaire*, ou *nombre d'or*, est une période de 19 années juliennes, après lesquelles les nouvelles lunes reviennent aux mêmes jours de l'année. Enfin, le *cycle d'indiction*, de 15 années juliennes, était relatif à certains actes judiciaires des Romains. Ces 3 périodes ont commencé ensemble 4714 ans avant J.-C. On demande à quelle époque postérieure elles ont de nouveau commencé en même temps, et par suite quel est l'intervalle de ces deux accords successifs, ou ce qu'on nomme la *période julienne.*

Entre la 1re année d'un cycle solaire et la 1re année d'un cycle postérieur quelconque, l'intervalle est évidemment un certain multiple de 28 ans ; de même entre deux cycles lunaires quelconques, l'intervalle est un multiple de 19 ans ; entre deux cycles d'indiction, c'est un multiple de 15 ans. L'intervalle demandé qui doit évidemment satisfaire aux 3 conditions analogues que nous venons d'indiquer, doit être un multiple commun de 28, 19,

15, évidemment leur plus petit multiple commun; 28, 19 et 15 étant premiers entre eux, deux à deux, cet intervalle est 28 × 19 × 15 (92). Telle est la durée de la période julienne.

La 1re période de l'ère chrétienne était la dixième du cycle solaire, la 2e du cycle lunaire, et la 4e du cycle d'indiction; qu'est donc l'année 1853 relativement à ces 3 cycles?

9 ans avant la 1re année de l'ère chrétienne commençait un cycle solaire; depuis le commencement de ce cycle jusqu'à 1853, il s'est écoulé 1862 ans; autant de fois 28 dans 1862, autant de cycles solaires écoulés depuis celui-là; on trouve le quotient 66 et le reste 14; on en conclut que 1853 est la 14e année du cycle solaire qui s'écoule actuellement. En se reportant de même à 1 an avant l'ère chrétienne on se trouve au commencement d'un cycle lunaire; depuis il s'est écoulé 1 + 1853 = 1854 ans; on divise 1854 par 19; le quotient est 97 et le reste 11; l'année 1853 est la 11e du cycle lunaire actuellement en cours; le nombre d'or pour 1853 est 11. On trouve de même le nombre 11 pour l'indiction romaine en 1853.

V. le double problème traité n° 250.

419. *L'année solaire moyenne renferme* 365,24226 *jours moyens. Réduire ce temps en jours, heures, minutes, secondes et dixièmes de secondes.*

Voici le calcul :

$$\begin{array}{r} 365^j,24226 \\ 24 \\ \hline 96904 \\ 48452 \\ \hline 5^h,81424 \\ 60 \\ \hline 48^m,85440 \\ 60 \\ \hline 51^s,26400 \end{array}$$

La réponse est 365j 5h 48m 51s,2. La marche à suivre se justifie d'elle-même; à chaque opération nous avons multiplié la partie décimale seule du multiplicande, comme si elle était isolée. (0,24226 de jour = 0,24226 de 24 heures = $24^h \times 0,24226$).

420. *Mercure tourne autour du soleil en* 87,97079 *jours; Vénus en* 224,70078 *jours; la terre en* 365,25637 (*année sidérale*); *Mars en* 686,97964; *Jupiter en* 4332,58480; *Saturne en* 10759,2198; *Uranus en* 30686,8205; *Neptune en* 60127 *jours. On demande de convertir tous ces nombres de jours en années, jours, heures, minutes, secondes; en prenant l'année égale au nombre de jours de la révolution terrestre.*

Les deux premiers nombres de jours étant inférieurs à 1 année ou 365,25637, on convertira tout simplement la fraction décimale de jour de chacun en heures, minutes, secondes. Quant aux nombres de jours plus grands que 365,25637, on divisera chacun d'eux par 365.256327. La partie entière du quotient exprimera les années cherchées; la partie entière du reste les jours en plus; on réduira la partie décimale de ce reste en heures, minutes, secondes.

Sachant que les carrés des temps des révolutions des planètes sont entre eux dans le même rapport que les cubes des distances moyennes de ces astres au soleil, on demande, à moins de 0,01, *quelles sont ces distances, en prenant la distance de la terre au soleil pour unité.*

Si on nomme x la distance de Mercure à la terre, on a, d'après l'énoncé :

$$x^3 : 1 = \frac{(87,97079)^2}{(365,25637)^2} = \left(\frac{8797079}{36525637}\right)^2$$

On peut obtenir x soit en employant les logarithmes, ce qui est le mieux, soit en extrayant la racine cubique du second membre de l'égalité. Par logarithmes, on trouve :

$$\log 10^n \times x = n + \frac{2 \log 87,97079 - 2 \log 365,25637}{3},$$

$$\text{ou } \log 10^n x = \frac{3n + 2 \log 87,97079 - 2 \log 365,25637}{3}.$$

Il suffira de faire $n = 1$ pour que la soustraction soit possible. On achèvera comme il est indiqué page 276.

On opérera d'une manière analogue pour Vénus. Pour les autres planètes dont les distances au soleil surpassent évidemment celle

de la terre, il n'y aura pas besoin de la puissance auxiliaire de 10.

Si, en matière d'exercice de calcul d'approximation, on voulait faire celui-ci sans logarithmes, on observerait que pour calculer x avec 2 décimales, c'est-à-dire avec deux chiffres pour les 2 premières planètes, et 3 pour les autres, il faut calculer la valeur ci-dessus de x^3 avec 3 chiffres pour les 2 premières et 4 chiffres pour les autres (302). Cette valeur de x^3 est le carré d'un quotient ; pour avoir les 3 ou 4 premiers chiffres du carré d'un quotient, il faut déterminer les 5 ou 6 premiers chiffres du quotient lui-même ; on calcule le quotient par la méthode de division abrégée appliquée aux nombres donnés, parmi lesquels le diviseur constant 365,25637 commence par un 3 ; de sorte que pour avoir le quotient avec 5 ou 6 chiffres, il suffira de prendre le dividende et le diviseur chacun avec 6 ou 7 chiffres ; or nous avons tous nos nombres avec cette approximation ; le quotient trouvé, on calculera son carré par la multiplication abrégée ; x^3 étant calculé, on extraira la racine cubique à moins de 0,001 en appliquant à cette valeur de x^3 la règle du n° 302.

421. *Une longueur BC de* l *mètres est vue d'un point A sous un angle de* 1″ ; c'est-à-dire que le point A étant supposé également distant des extrémités B et C de la longueur l, l'ang BAC, ou l'arc BC qui le mesure égale 1″. *On demande, à moins d'une unité, combien la distance AB vaut de fois la longueur* l ?

L'arc BC n'étant que de 1″, on peut regarder, sans erreur relative sensible, cet arc comme égal à sa corde l ; $1'' = l$. Une circonférence, en général, se compose de 360° ou $60' \times 360$ ou $60'' \times 60 \times 360 = 1296000''$. Le contour de celle à laquelle appartient l'arc BC est donc égal à 1296000 l ; on a donc l'égalité

$$1296000\, l = 2\pi.\, D, \text{ ou } 648000\, l = \pi.\, D,$$

D désignant la distance AB. On déduit de là :

$$D = \frac{648000}{\pi}\, l = \left(648000 \times \frac{1}{\pi}\right) \times l.$$

Nous n'avons qu'à calculer à moins d'une unité le produit entre parenthèses. Nous l'effectuerons par la multiplication abrégée.

$$\frac{1}{\pi} = \begin{array}{r} 0{,}3183098361 \\ 000846 \\ \hline 190984998 \\ 12732392 \\ 2546472 \\ \hline 206264{,}862 \end{array}$$

$D = 206264\ l$ à moins d'une longueur l, par défaut ; nous avons cherché le produit pour plus de sûreté à moins de 0,1. (N° 205.)

Nous appelons l'attention du lecteur sur cette multiplication de 648000 par $\frac{1}{\pi}$, substituée à la division du même nombre par π. Dans la multiplication on n'a aucun égard aux trois zéros qui terminent 648000, si ce n'est pour poser l'opération ; la division, au contraire, ne serait guère plus simple avec les zéros qu'avec d'autres chiffres à leur place.

Le rayon terrestre, r, *est vu du soleil sous un angle de* 8″57 ; *trouver à moins d'une unité la distance D du soleil à la terre, exprimée en rayons terrestres* (8″,57 parallaxe horizontale moyenne du soleil).

$$8''57 = r; \quad 1'' = \frac{r}{8{,}57}.$$

$$1296000'' = \frac{1296000\ r}{8{,}57} = 2\pi D,$$

d'où

$$D = \frac{648000\, r}{8{,}57 \times \pi} = \left(\frac{648000 \times \frac{1}{\pi}}{8{,}57}\right) r.$$

Ayant effectué le même produit $648000 \times \frac{1}{\pi}$ que tout à l'heure, il nous le faut diviser par 8,57, et obtenir le quotient à moins d'une unité. Ce quotient aura 5 chiffres, et le diviseur com-

(*) Le demi-grand axe de l'orbite terrestre étant vu de l'étoile la plus rapprochée sous un angle moindre que 1″, il résulte de là que cette étoile est à une distance de la terre plus grande que 206264,7 fois ce demi-grand axe.

mence par un 8; il suffira de connaître 6 chiffres du dividende, ou bien 7, pour avoir le quotient à moins de 0,1. On divisera donc 206264,8 par 8,57.

```
206264800 | 857
 3486     |------
  5848    | 24068,2
   7950            D = 24068 r
    2040           à moins d'une fois r.
     326
```

Le demi-grand axe, a, *de l'orbite terrestre est vu d'une étoile sous un angle de 0''37, autrement dit, la parallaxe annuelle d'une étoile est* 0'',37 (61* *du Cygne*) (*). *Exprimer à moins d'une unité la distance D de cette étoile à la terre (l'unité étant le demi-grand axe* a *de l'orbite terrestre*).

$$0'',37 = a, \text{ ou } 1'' \times 0,37 = a\text{; donc } 1'' = \frac{a}{0,37}$$

$$\frac{1296000\ a}{0,37} = 2\pi D\text{; d'où } D = \left(\frac{648000 \times \frac{1}{\pi}}{0,37}\right) a$$

C'est toujours le même produit $648000 \times \frac{1}{\pi}$ à diviser par 0,37, à moins d'une unité. Le quotient aura 6 chiffres; il faut prendre le dividende avec 7, ou 8, pour plus de sûreté.

```
206.2648600 | 37
 212        |---------
  276       | 554725,9
   174
    268
     96            D = 554725 a.
     220
      350
```

Ce que nous avons dit dans cet ouvrage au sujet des approxi-

(*) D'après M. Faye.

mations suffit pour tous les cas où il s'agit d'une seule opération (addition, soustraction, etc.) effectuée sur des grandeurs approchées. Quand l'opération n'est pas simple, on procède par une série de considérations analogues à celles que nous avons employées dans le problème résolu n° 420, pour arriver, par l'application des principes simples combinés, à trouver le résultat demandé avec l'approximation voulue.

EXERCICES.

Afin de donner au lecteur l'occasion et la facilité de résoudre un certain nombre de questions analogues à celles que nous avons traitées, nous inscrivons ici quelques nombres utiles tirés, pour la plupart, du dernier annuaire du bureau des longitudes.

Nous indiquons d'abord quelques densités ou pesanteurs spécifiques principales.

L'unité de pesanteur spécifique pour les corps solides et liquides est celle de l'eau distillée à 4° centigrades, et pour les gaz c'est celle de l'air à 0° et sous la pression atmosphérique de 0m,76.

Pesanteurs spécifiques.

Métaux.		Métaux.	
Fer,	7,788.	Mercure à 0°,	13,538.
Fer fondu,	7,200.	Argent fondu,	10,47.
Acier non écroui,	7,810.	Or forgé,	19,36.
Zinc,	7,19.	Or fondu,	19,26.
Plomb fondu,	11,35.	Platine,	21,53.
Cuivre fondu,	8,85.	Platine laminé,	22,06.
Id. forgé,	8,95.		

Liquides.		Gaz.	
Eau distillée,	1,000.	Air,	1,000.
Mercure à 0.	13,598.	Oxygène,	1,106.
Alcool absolu,	0,792.	Hydrogène,	0,0691.
Éther,	0,715.	Hydrog. carb. des mar.	0,555.
Lait,	1,03.	Chlore,	2,470.
Eau de mer,	1,026.	Azote,	0,972.
Vin de Bordeaux,	0,994.	Acide carbonique,	1,529.
Id. de Bourgogne,	0,995.	Ammoniaque,	0,596.
Huile d'olive,	0,915.		

Pour établir une liaison entre les pesanteurs spécifiques des solides ou liquides et des gaz, il faut remarquer que, d'après les recherches les plus récentes, le poids de l'air atmosphérique sec à Paris, à la température 0° et sous

la pression de $0^m,76$ est, à volume égal, $\frac{1}{773,28}$ de celui de l'eau distillée ; d'où il résulte que le poids d'un litre d'air est alors $\frac{1^k}{773,28} = 1$ gr. 293187 (*).

Par une moyenne entre un grand nombre de pesées, on a trouvé qu'à 0° et sous la pression de $0^m,76$, le rapport du poids de l'air à celui du mercure est de 1 à 10513,5.

Dilatations linéaires qu'éprouvent diverses substances depuis le terme de la congélation de l'eau, jusqu'à celui de son ébullition, de 0° *à* 100, *d'après* LAPLACE *et* LAVOISIER.

Acier non trempé,	0,0010791.	Or de départ,	0,0014661.
Argent de coupelle,	0,0019097.	Or au titre de Paris,	0,0015515.
Cuivre,	0,0017173.	Platine,	0,0008565.
Cuivre jaune ou laiton,	0,0018782.	Plomb,	0,0028484.
Étain de Falmouth,	0,0021730.	Verre de St-Gobain,	0,0008909.
Fer doux forgé,	0,0012205,	Flint-glass anglais,	0,0008117.

Le mercure se dilate en volume, de 0° à 1000°, de 0,018018 = 100°/5550.

L'eau de	0,0435	= 1/23.
L'alcool de	0,1111	= 1/9.
Tous les gaz de	0,366	= 100/273.

Parallaxes annuelles de quelques étoiles (d'après M. FAYE).

α du Centaure,	0″ 91 à 1/13 près.	Arcturus,	0,13 incertaine.
61ᵉ du Cygne,	0,37 à 1/20 près.	La Polaire,	0,11 à 1/10 près.
Sirius,	0,23 incertaine.	La Chèvre,	0,05 ; très-incert.
α de la Lyre,	0″,21 à 1/5 près.		

Déterminer, en adoptant ces parallaxes, la distance de chaque étoile à la terre en rayons de l'orbite terrestre, et le temps que met la lumière à nous venir de chacune d'elles à raison de 77000 lieues de 4 kilom. par seconde, le rayon de l'orbite terrestre étant égal à 38000000 lieues.

(*) Nous avons pris dans le cours de l'ouvrage $\frac{1}{770}$ comme exprimant le rapport du poids de l'air au poids de l'eau ; c'est le nombre que l'on trouve dans des traités de physique récents ; on peut, si l'on veut, refaire les mêmes calculs avec $\frac{1}{773,28}$ et $1^{gr.},293187$.

aris. — Imprimé par E. THUNOT et Cᵉ, 26, rue Racine.